

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Machines à supports vecteurs. Un point de vue géométrique

GETTI, Virginie

*Award date:*  
2002

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FUNDP  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8  
B-5000 Namur Belgique

# Machines à supports vecteurs. Un point de vue géométrique.



Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade de  
Licencié en Sciences Mathématiques  
par

**Getti Virginie**

**Promoteur : Monsieur Van Hien Nguyen.**

Année académique 2001-2002

## **Résumé:**

Les machines à supports vecteurs (SVMs) et les méthodes reliées aux noyaux sont devenues des outils fort populaires pour la fouille des données telle que la classification et la régression. Nous développons une interprétation géométrique intuitive des machines à supports vecteurs générales pour la classification de données linéairement séparables et inséparables. Pour le cas séparable, trouver la marge maximale entre les deux ensembles est équivalent à trouver les points les plus proches des enveloppes convexes. Nous étendons cet argument au cas inséparable en utilisant l'enveloppe convexe réduite loin des 'outliers'. Nous prouvons que résoudre la formulation de l'enveloppe convexe réduite est exactement équivalente à résoudre SVM inséparable pour un choix approprié des paramètres. Par le choix de paramètres appropriés, la nouvelle formulation devient claire de manière géométrique et peut être résolue par des algorithmes rapides du point le plus proche.

## **Abstract:**

Support Vector Machines (SVMs) and related kernel methods have become increasingly popular tools for data mining tasks such as classification and regression. We develop an intuitive geometric interpretation of the standard support vector machines (SVMs) for classification of both linearly separable and inseparable data. For the separable case finding the maximum margin between the two sets is equivalent to finding the closest points in the convex hulls. We extend this argument to the inseparable case by using the reduced convex hull ( reduced away from outliers ). We prove that solving the reduced convex hull formulation is exactly equivalent to solving the standard inseparable SVM for appropriate choices of parameters. By the choice of appropriated parameters, the new formulation becomes geometrically clear and can be solved by fast nearest point algorithms.

## Remerciements:

Avant de commencer ce mémoire, je voudrais remercier mon promoteur monsieur Van Hien Nguyen pour avoir accepté de travailler avec moi et de m'avoir aidé à avancer dans mon travail; monsieur J.-J Strodier pour m'avoir aiguillé sur certaines démonstrations et pour avoir accepté ainsi que madame S. Thiry d'être mes lecteurs; ma famille pour le soutien qu'elle m'a apporté; mes parents pour avoir toujours cru en moi que ce soit dans mes études ou dans ma vie en général; mon ami Sébastien pour m'avoir aidé dans la rédaction et pour m'avoir soutenue dans les moments les plus difficiles; mon meilleur ami Anthony pour ses connaissances en orthographe; mes ami(e)s en général pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter durant toutes ces années.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et définitions.</b>	<b>3</b>
1.1	Problème général. . . . .	3
1.1.1	Programmation linéaire générale. . . . .	4
1.1.2	Forme standard. . . . .	4
1.1.3	Forme canonique. . . . .	4
1.2	Dual. . . . .	5
1.3	Fonction Lagrangienne et fonction duale. . . . .	6
1.4	Conditions de Karush-Kuhn-Tucker. . . . .	6
<b>2</b>	<b>Machines à supports vecteurs (SVMs).</b>	<b>8</b>
2.1	Idée centrale. . . . .	8
2.2	Théorie des SVM. . . . .	10
2.2.1	Cas linéairement séparable. . . . .	10
2.2.2	Résolution par les multiplicateurs de Lagrange. . . . .	17
2.2.3	Cas linéairement inséparable. . . . .	20
2.2.4	Cas non linéaire. . . . .	26
2.2.5	Résolution du cas non linéaire. . . . .	31
2.3	Régression des SVMs. . . . .	42
2.3.1	Introduction. . . . .	42
2.3.2	Quand y-a-t-il l'existence d'un $\epsilon$ -tube? . . . . .	42
2.3.3	Construction d'un $\epsilon$ -tube. . . . .	47
<b>3</b>	<b>Le problème sous forme matricielle.</b>	<b>55</b>
3.1	Notation. . . . .	55
3.2	Idée centrale. . . . .	55
3.3	Cas linéairement séparable. . . . .	56
3.3.1	Première idée de construction. . . . .	60
3.3.2	Deuxième idée de construction. . . . .	62
3.4	Cas linéairement inséparable. . . . .	73
<b>4</b>	<b>Conclusions.</b>	<b>94</b>

**Annexes.**

**95**

# Chapitre 1

## Rappels et définitions.

Avant de commencer ce travail, rappelons brièvement quelques notions et notations utiles pour suivre le cheminement de ce travail.

### 1.1 Problème général.

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} opt & f(x_1, \dots, x_n) \\ sc & \begin{array}{ll} g_i(x_1, \dots, x_n) & \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(x_1, \dots, x_n) & = 0 \quad j = 1, \dots, q \\ x_k \in \mathbb{R} & k = 1, \dots, n \end{array} \end{array} \right.$$

où :

- $f, g_i, h_j$  = fonctions numériques.
- $x_k$  = variables du problème.
- $f$  = fonction objectif ou économique.
- $g_i, h_j$  = contraintes d'inégalité et d'égalité respectivement.
- $(x_1, \dots, x_n)$  = programme.

Examinons à présent les différentes formes sous lesquelles ce problème peut être représenté.

### 1.1.1 Programmation linéaire générale.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{opt} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sc} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & x_j \text{ quelconque} \end{array} \right.$$

### 1.1.2 Forme standard.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sc} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = cx \\ \text{sc} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

### 1.1.3 Forme canonique.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sc} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{min} & z = cx \\ \text{sc} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

## 1.2 Dual.

Indices	P	D
	$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	$\max v = \sum_{i=1}^m y_i b_i$
$i = 1, \dots, m$	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$i = 1, \dots, m$	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	ou $y_i < 0$ $y_i > 0$
$j = 1, \dots, n$	$x_j \geq 0$	$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \leq c_j$
$j = 1, \dots, n$	ou $x_j < 0$ $x_j > 0$	$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = c_j$

Une propriété importante est la suivante :  
 Le dual du dual est égal au primal.

### 1.3 Fonction Lagrangienne et fonction duale.

Partant du problème suivant :

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ sc & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{cases}$$

La fonction Lagrangienne est la suivante :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ .

Les  $\lambda_i \geq 0$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés à  $g_i(x) \leq 0$  et les  $\mu_j$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés à  $h_j(x) = 0$

$$\lambda_i, \mu_j = \text{variables duales}$$

La fonction duale est la suivante :

$$d(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, \mu)$$

où  $d : \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

Le problème dual est par définition le problème suivant :

$$\max_{\lambda \geq 0, \mu} d(\lambda, \mu)$$

### 1.4 Conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ sc & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$



C'est-à-dire que l'on considère le problème de départ sans les contraintes d'égalité.

Soit  $x^* \in \mathbb{R}^n, \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ .

Nous dirons que les conditions de Karush-Kuhn-Tucker( KKT ) sont satisfaites en  $(x^*, \lambda^*)$  si :

1)  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$ .

2)  $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ .

3)  $\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$ .

4)  $g_i(x^*) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$ .

## Chapitre 2

# Machines à supports vecteurs (SVMs).

### 2.1 Idée centrale.

Commençons par un exemple de classification des clients d'une banque : une banque est confrontée à la tâche de juger ses clients suivant leur solidité à payer le prêt qui leur a été donné. Pour ce faire, la banque collecte des informations auprès de ces mêmes clients : âge, sexe, revenu, etc ...

Notons :

- $n$  le nombre de propriétés caractéristiques de chaque client.
- $x_i \in \mathbb{R}$  désigne la  $i$ ème caractéristique.

Chaque client est donc complètement décrit par un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Définissons :

$$S = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_l, y_l) \subset \mathbb{R}^n \times \{-1, +1\}$$

où  $n < \infty$

$$\text{et } y_i = \begin{cases} +1 & \text{si le client paie ses emprunts.} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où les données sont indépendamment identiquement distribuées.

C'est-à-dire qu'elles ont une même loi de probabilité et qu'elles sont indépendantes.

$$Y = \text{espace des classes.}$$

Le but de cette classification est de trouver une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  qui assigne à chaque futur client  $x$  à venir, une des classes suivantes :

'bon client'                      si  $x \mapsto f(x) = y = +1$  : classe  $C^+$   
 'mauvais client'                si  $x \mapsto f(x) = y = -1$  : classe  $C^-$

Un client sera considéré comme 'bon' s'il est capable de rembourser ses emprunts et 'mauvais' s'il n'en est pas capable. Pour trouver un plan de séparation des deux classes, la banque considère le risque de se tromper de classe c'est-à-dire mettre un 'bon client' dans  $C^-$  et/ou un 'mauvais client' dans  $C^+$ . Pour cela, on définit  $P(x, y)$  = probabilité qu'un client  $x$  choisi au hasard est 'mauvais' ou 'non'.

La perte est par définition :

$$\mathcal{L}(f(x), y) = \begin{cases} 0 & \text{quand } y = f(x) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

= coût d'assignation d'un client  $x$  à la classe  $f(x)$  lorsque la vraie classe est  $y$ .

A l'aide de ces notions, la fonction risque est définie comme :

$$R[f] = \int_{\mathbb{R}^n \times \{\pm 1\}} \mathcal{L}(f(x), y) \, dP(x, y)$$

Dans notre exemple, cette quantité sera à minimiser car la banque veut le mieux possible classer ses clients. Cela reviendra donc à minimiser le risque de se tromper.

Vu que nous disposons uniquement de l'ensemble  $S$ , uniquement le *risque empirique* est calculable. Ce risque est défini comme :

$$R_{emp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(f(x_i), y_i)$$

Considérons à présent un ensemble  $H$  de classificateurs  $f$  qui sera défini par :

$$\begin{aligned} H &= \text{espace des hypothèses.} \\ &= \{f(x; \alpha) \text{ tel que } \alpha \in \Lambda\} \\ &= \{f_\alpha(x) \text{ tel que } \alpha \in \Lambda\} \end{aligned}$$

Etant donnés  $S$  et  $H$ , notre tâche consiste à trouver  $\bar{\alpha}$  tel que :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \operatorname{argmin}_{\alpha \in \Lambda} R[\alpha] \\ &= \operatorname{argmin}_{\alpha \in \Lambda} \int \mathcal{L}(f_\alpha(x), y) \, dP(x, y) \end{aligned}$$

Pour un  $x$  donné et un  $\alpha$ , cela donnera toujours la même sortie :

$$f(x, \alpha) = f_\alpha(x)$$

où aucune connaissance ne nous est donnée sur  $P(x, y)$ . Ce qui entraîne que  $R[\alpha]$  est inconnu puisque  $P(x, y)$  l'est. Afin de pouvoir résoudre ce problème, nous devons faire appel à un principe d'induction qui est la minimisation du risque empirique [12]. Notre tâche consiste alors à trouver :

$$\begin{aligned} \alpha_l \text{ tel que } \alpha_l &= \operatorname{argmin}_{\alpha \in \Lambda} R_{\text{emp}}[\alpha] \\ &= \operatorname{argmin}_{\alpha \in \Lambda} \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathcal{L}(f(x_i, \alpha), y_i) \end{aligned}$$

## 2.2 Théorie des SVM.

### 2.2.1 Cas linéairement séparable.

Les données du problème sont les suivantes :

- Un ensemble  $S$  composé de points  $x_i \in \mathbb{R}^n$  avec  $i = 1, \dots, l$ .
- Chaque point  $x_i$  appartient à chacune des deux classes  $C^-$  et  $C^+$  et un label  $y^i \in \{-1, +1\}$  lui est assigné.
- Soit la fonction de classification  $f(x) = \operatorname{sign}(\omega^T x + b)$ .
- Le vecteur  $\omega$  détermine l'orientation du plan de séparation (voir figure (2.1)).
- Le scalaire  $b$  détermine la distance du plan à l'origine (voir figure (2.1)).

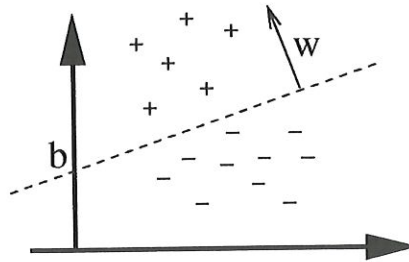


FIG. 2.1 – Interprétation géométrique de l'hyperplan de séparation.

Notre but est d'établir l'équation d'un hyperplan qui divise  $S$  tel que tous les points d'une même classe se trouvent d'un même côté de cet hyperplan en maximisant la distance minimale entre chacune des deux classes et cet hyperplan.

**Définition 2.2.1**

Deux ensembles sont linéairement séparables s'il existe un hyperplan qui classe correctement les points des deux ensembles.

Il y a une infinité de plans de séparation possibles qui classent correctement les données. La figure(2.2) illustre deux hyperplans de séparation

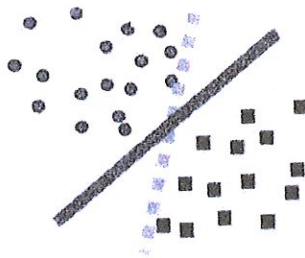


FIG. 2.2 – Deux plans de séparation possibles linéaires.

différents. Lequel de ces deux hyperplans est préférable? Intuitivement, on préfère l'hyperplan solide car de petites perturbations sur n'importe quel point n'introduisent pas d'erreur de classification comme sur la figure (2.3).

Sans plus d'informations, l'hyperplan solide de la figure (2.2) est mieux pour généraliser les futures données. Géométriquement, nous pouvons caractériser l'hyperplan solide comme le plus loin des deux classes.

Comment pouvons-nous construire l'hyperplan le plus éloigné des deux classes? Nous pouvons examiner l'enveloppe convexe de chaque classe et ensuite trouver les points les plus proches dans les enveloppes convexes.

**Définition 2.2.2**

L'enveloppe convexe d'un ensemble de points est le plus petit ensemble convexe contenant les points.

Si nous construisons l'hyperplan qui bissecte les points les plus proches dans les enveloppes convexes ( $\omega = d - c$ ), l'hyperplan résultant doit être robuste dans le même sens. Les points les plus proches dans les enveloppes convexes

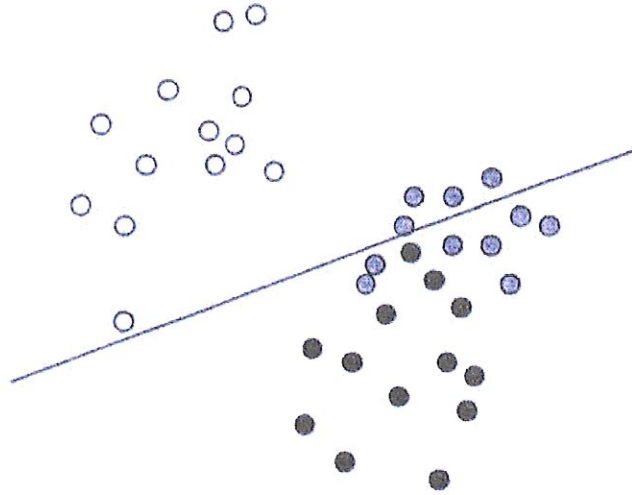


FIG. 2.3 – Des points 0 mal classés.

peuvent être trouvés en résolvant le problème quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\alpha} & \frac{1}{2} \|c - d\|^2 \\ sc & \sum_{y_i \in \text{classe } C^+} \alpha_i = 1 \\ & \sum_{y_i \in \text{classe } C^-} \alpha_i = 1 \\ & \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, l. \end{array} \right.$$

où :

$$\begin{aligned} - c &= \sum_{y_i \in \text{classe } C^+} \alpha_i x_i. \\ - d &= \sum_{y_i \in \text{classe } C^-} \alpha_i x_i. \end{aligned}$$

Il existe plusieurs algorithmes dans la littérature pour résoudre ces problèmes quadratiques [4].

Remarquer que la solution dépend uniquement des trois points encadrés (voir figure (2.4)).

### Définition 2.2.3

La distance qui sépare les deux classes  $C^+$  et  $C^-$  dans la direction de  $\omega$  est appelée la marge.



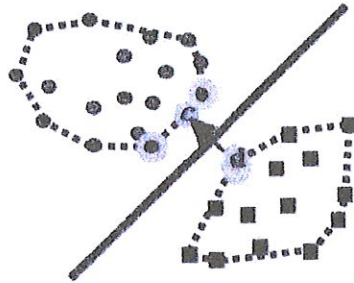


FIG. 2.4 – Meilleur plan bissectant les points les plus proches dans les enveloppes convexes.

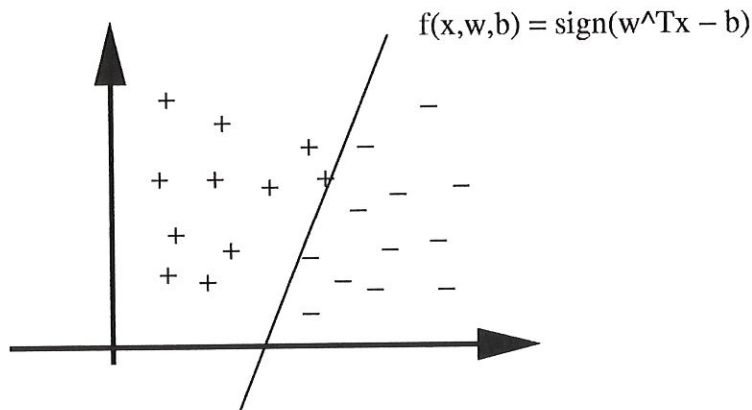


FIG. 2.5 – Interprétation géométrique de la marge.

#### Définition 2.2.4

*Le séparateur linéaire de marge maximale est le séparateur qui a la marge maximale.*

Une des alternatives pour trouver cet hyperplan est de maximiser la marge entre les trois points encadrés (voir figure (2.7)). Dans la méthode de marge maximale, les plans d'appui sont éloignés jusqu'à toucher les vecteurs de support.

#### Définition 2.2.5

*Un plan d'appui est un plan tel que tous les points d'une même classe se situent du même côté de ce plan.*

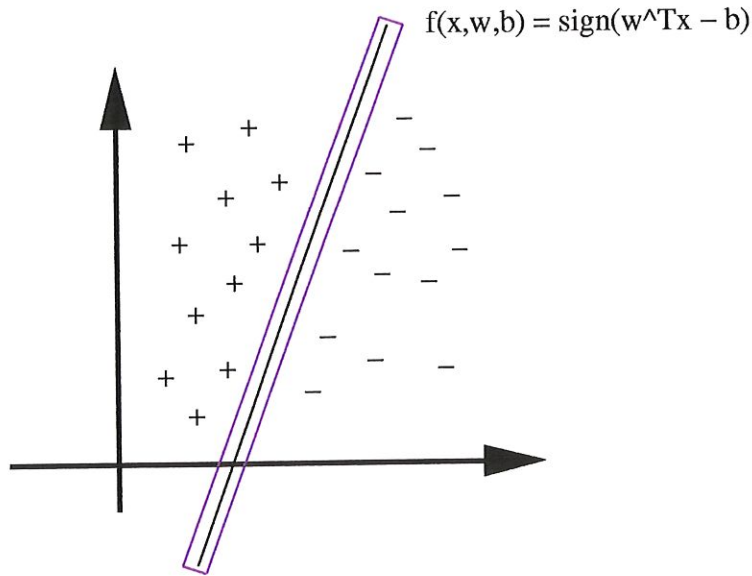


FIG. 2.6 – Interprétation géométrique de la marge maximale.

### Définition 2.2.6

Un vecteur de support est un vecteur se trouvant sur un plan d'appui.

Pour les points de la classe  $C^+$ , on voudra qu'il existe  $\omega$  et  $b$  tel que  $\omega^T x_i + b > 0 \quad i = 1, \dots, l$ . Similairement pour l'autre classe. Supposons que la plus petite valeur de  $|\omega^T x_i + b| = K$  alors  $\omega^T x_i + b \geq K$ . L'argument de la fonction de classification étant invariant sous mise à l'échelle positive, nous allons implicitement fixer une échelle en demandant  $\omega^T x_i + b \geq +1$  pour tous les points de  $C^+$ . De même pour l'autre classe, on fixera  $\omega^T x_i \leq -1$ . D'où, nous pouvons en tirer la définition suivante :

### Définition 2.2.7

L'ensemble  $S$  est linéairement séparable si

$$\begin{aligned} \exists \omega \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } & \begin{aligned} 1) \quad & \omega^T x_i + b \geq +1 \quad \forall x_i \in C^+ \quad (y_i = +1) \\ 2) \quad & \omega^T x_i + b \leq -1 \quad \forall x_i \in C^- \quad (y_i = -1) \end{aligned} \\ & \forall i = 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

$$1) + 2) \Rightarrow \boxed{y_i(\omega^T x_i + b) \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, l} \quad (2.1)$$

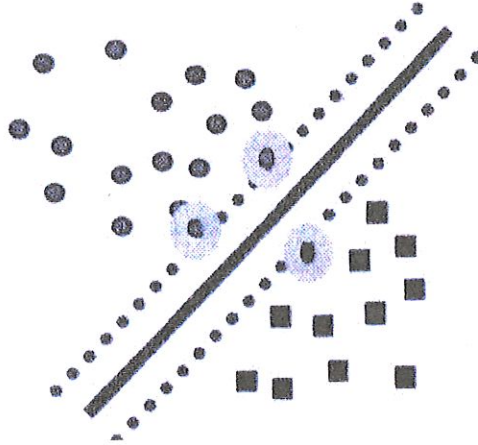


FIG. 2.7 – Meilleur plan maximisant la marge.

Le couple  $(\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  définit un hyperplan d'équation :

$$\omega^T x + b = 0$$

Une fois cet hyperplan déterminé, nous pouvons introduire la notion de distance signée, suivant que l'on se trouve à gauche ou à droite de cet hyperplan.

### Définition 2.2.8

La distance signée d'un point  $x_i$  à un hyperplan de séparation d'équation  $\omega^T x + b$  est donnée par :

$$\frac{\omega^T x_i + b}{\|\omega\|} \quad (2.2)$$

En combinant (2.1) et (2.2), on obtient :

$$y_i d_i = \frac{y_i(\omega^T x_i + b)}{\|\omega\|} \geq \frac{1}{\|\omega\|}$$

Ce qui entraîne que la valeur de  $\frac{1}{\|\omega\|}$  est la plus petite distance possible entre les points  $x_i$  et l'hyperplan de séparation d'équation  $\omega^T x + b = 0$

### Définition 2.2.9

Etant donné un hyperplan de séparation d'équation  $\omega^T x + b$  pour un ensemble  $S$ , la représentation canonique de cet hyperplan de séparation est obtenue en transformant le couple  $(\omega, b)$  en le couple  $(\omega', b')$  tel que la distance au point le plus proche soit égale à  $\frac{1}{\|\omega'\|}$ .

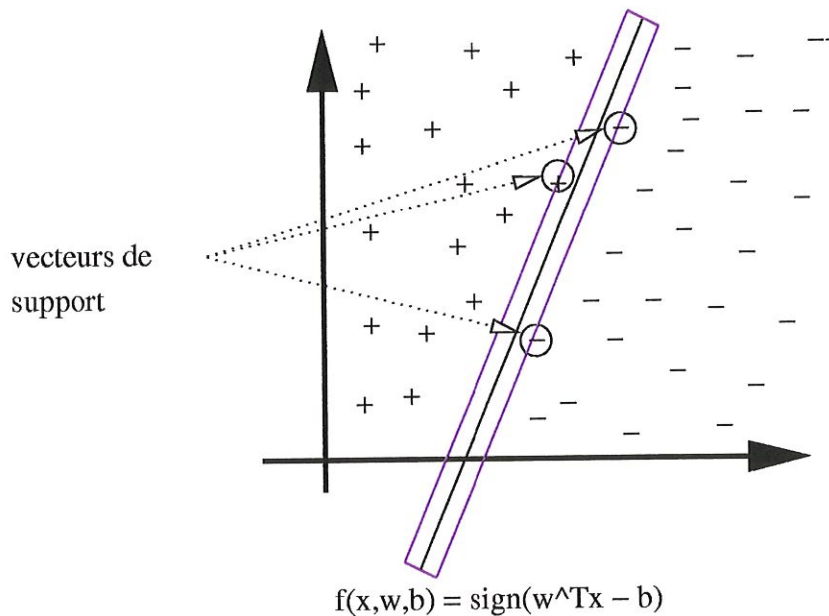


FIG. 2.8 – Interprétation géométrique des vecteurs de support.

Par la suite, nous supposons que l'hyperplan de séparation sera toujours donné par sa représentation canonique et nous écrirons  $\omega^T x + b = 0$  au lieu de  $\omega' x + b' = 0$

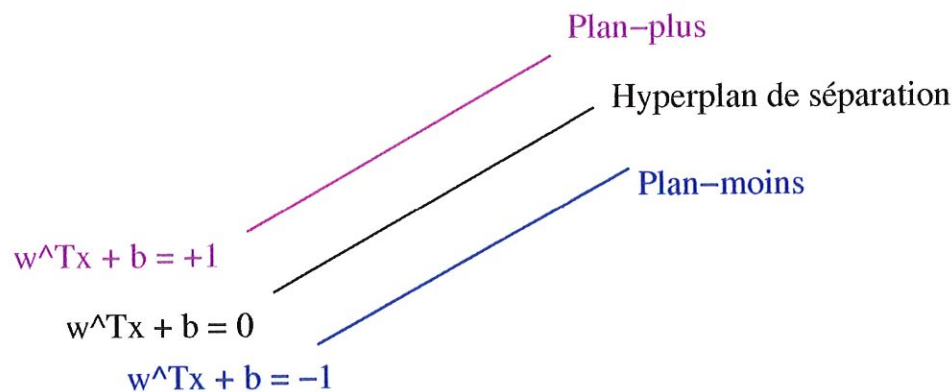
**Définition 2.2.10**

*Etant donné un ensemble linéairement séparable  $S$ , l'hyperplan de séparation optimal est l'hyperplan de séparation qui maximise la distance au point le plus proche de  $S$ .*

Puisque la distance au point le plus proche est de  $\frac{1}{\|\omega\|}$ , le problème (appelé problème de séparation de marge dure) revient à :

$$\begin{cases} \min_{\omega, b} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 \\ \text{sc} & y_i(\omega^T x + b) \geq 1 \quad i = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (2.3)$$

**Attention !** Si le couple  $(\omega, b)$  résout (2.3) alors pour au moins un  $x_i \in S$ ,  $y_i(\omega^T x_i + b) = 1$ .



Plan-plus :=  $\{ x \mid w^T x + b = +1 \}$   
 Plan-moins :=  $\{ x \mid w^T x + b = -1 \}$

FIG. 2.9 – Comment représenter un hyperplan de séparation et sa marge ?

### Définition 2.2.11

La quantité  $\frac{2}{\|\omega\|}$  qui mesure la distance entre les deux classes  $C^+$  et  $C^-$  dans la direction de  $\omega$  est appelée la marge.

### 2.2.2 Résolution par les multiplicateurs de Lagrange.

Dans (2.4), les vecteurs de support déterminent les points les plus proches dans les enveloppes convexes. Ce n'est pas une coïncidence, ceci est dû à la dualité.

Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)^T \geq 0$   
 $= l$  multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes  
 $y_i(\omega^T x_i + b) \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, l.$

Le problème (2.3) est équivalent à déterminer le point de selle de la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L}(\omega, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + \sum_{i=1}^l \alpha_i [1 - y_i(\omega^T x_i + b)] \quad (2.4)$$

Par les conditions de KKT :

$$\begin{aligned}
\nabla_b \mathcal{L}(\omega, b, \alpha) = 0 &\iff \underbrace{\nabla_b \frac{1}{2} \|\omega\|^2}_0 + \underbrace{\nabla_b \sum_{i=1}^l \alpha_i [1 - y_i(\omega^T x_i + b)]}_{-\nabla_b \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i (\omega^T x_i + b)} = 0 \\
&\iff - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\omega \mathcal{L}(\omega, b, \alpha) = 0 &\iff \nabla_\omega \left( \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + \sum_{i=1}^l \alpha_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \omega^T x_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i b \right) = 0 \\
&\iff \omega - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i x_i = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

En substituant (2.5) et (2.6) dans (2.4), on obtient :

$$\mathcal{L}(\omega, b, \alpha) = \frac{1}{2} \underbrace{\omega^T \omega}_{\|\omega\|^2} + \sum_{i=1}^l \alpha_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \omega^T x_i - b \underbrace{\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i}_{=0(2.5)}$$

Or  $\omega = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i x_i$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\omega, b, \alpha) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \omega^T x_i + \sum_{i=1}^l \alpha_i \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j + \sum_{i=1}^l \alpha_i
\end{aligned}$$

Pour séparer les deux ensembles  $C^+$  et  $C^-$ , le problème revient alors à un problème de maximisation.

**Définition 2.2.12**

La fonction duale est définie comme :

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j$$



Le problème revient à :

$$\begin{cases} \max_{\alpha} & -\frac{1}{2} \alpha^T D \alpha + \sum_{i=1}^l \alpha_i \\ \text{sc} & \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \quad \alpha_i \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $D \in \mathbb{R}^{l \times l}$  tel que  $D_{ij} = y_i y_j x_i^T x_j \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, l$ .

**Conclusions :** Il suit que  $\bar{\omega}$  qui correspond à l'optimum est qui est défini par  $\sum_{i=1}^l \bar{\alpha}_i y_i x_i$  ( 2.6 ) . Tandis que  $\bar{b}$ , l'optimum, peut être trouvé par les conditions de KKT.

$$\boxed{\bar{\alpha}_i [1 - y_i (\bar{\omega}^T x_i + \bar{b})] = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, l}$$

Si  $\bar{\alpha}_i > 0$ , cela entraîne que  $y_i (\bar{\omega}^T x_i + \bar{b}) = 1$ . C'est-à-dire que les points correspondants  $x_i$  de  $S$  sont les plus proches de l'hyperplan de séparation optimal.

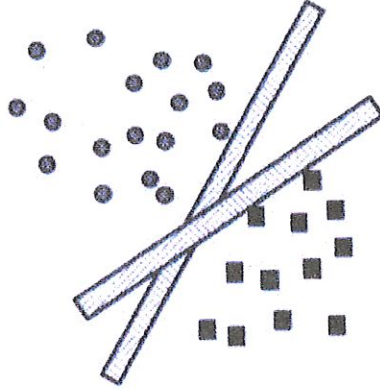


FIG. 2.10 – Plusieurs plans de marge fine possibles.

**Remarque :** Un plan de marge fine (voir figure(2.10)) peut prendre plusieurs orientations possibles et encore séparer strictement toutes les données.

Le plan de marge large (voir figure(2.11)) a une flexibilité limitée pour séparer les données. En quelque sorte, un plan de marge large est moins complexe qu'un plan de marge fine. Ainsi la complexité ou la capacité d'un séparateur

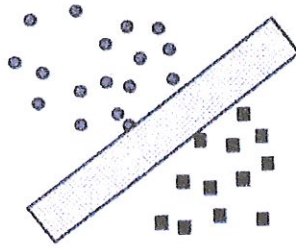


FIG. 2.11 – Plan de marge large possible.

linéaire est fonction de la marge de séparation. En maximisant la marge, on régularise la complexité du modèle.

### 2.2.3 Cas linéairement inséparable.

Nous avons supposé précédemment que les deux ensembles de données étaient linéairement séparables. Si ce n'est pas le cas, le problème de recherche d'un hyperplan de séparation optimal est dénué de sens car les enveloppes convexes s'intersectent.

Remarquer que si nous déplaçons le rectangle se trouvant dans l'intersection

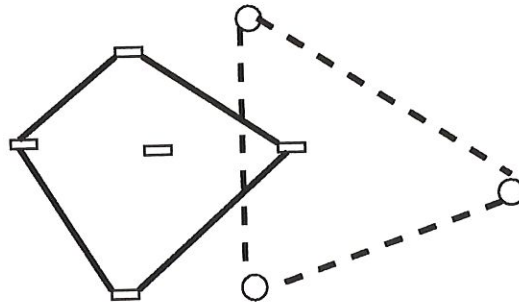


FIG. 2.12 – Pour le cas inséparable, les enveloppes convexes s'intersectent.

vers la gauche, nous pouvons appliquer la stratégie précédente. D'où, nous devons donc restreindre l'influence de tout point isolé. Ceci peut être résolu en utilisant les enveloppes convexes réduites au lieu de la définition usuelle des enveloppes convexes. L'influence de chaque point est réduite en introduisant une borne supérieure  $D > 1$  sur les multiplicateurs de chaque point.

**Définition 2.2.13**

L'enveloppe convexe réduite est définie comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} d = \sum_{y_i \in \text{classe } C^+} \alpha_i x_i \\ sc = \sum_{y_i \in \text{classe } C^-} \alpha_i x_i \\ 0 \leq \alpha_i \leq D \end{array} \right.$$

Pour  $D$  suffisamment petit, les enveloppes convexes réduites ne s'intersectent pas.

La figure (2.13) montre les enveloppes convexes réduites ( $D = 0.5$ ) et le

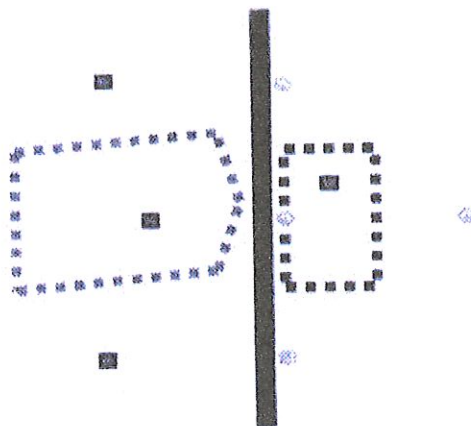


FIG. 2.13 – Meilleur plan de séparation des enveloppes convexes réduites.

plan de séparation construit en bissectant les points les plus proches dans les enveloppes convexes réduites. Les enveloppes convexes réduites de chaque ensemble sont indiquées par des lignes pointillées.

Pour trouver les points les plus proches dans les enveloppes convexes réduites, nous modifions le programme quadratique pour le cas séparable en additionnant la borne supérieure  $D$  sur les multiplicateurs de chaque contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\alpha} & \frac{1}{2} \left\| \sum_{y_i \in \text{classe } C^+} \alpha_i x_i - \sum_{y_i \in \text{classe } C^-} \alpha_i x_i \right\|^2 \\ \text{sc} & \sum_{y_i \in \text{classe } C^+} \alpha_i = 1 \\ & \sum_{y_i \in \text{classe } C^-} \alpha_i = 1 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq D \end{array} \right.$$

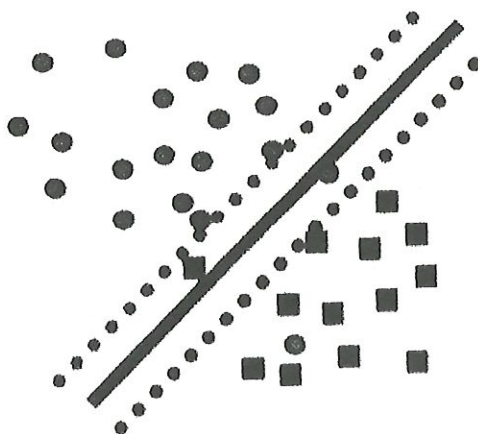


FIG. 2.14 – Plan sélectionné pour maximiser la marge et minimiser l'erreur.

Pour le cas linéairement inséparable (voir figure (2.14)), le primal de la méthode du plan d'appui échoue. Les contraintes doivent donc être relâchées. Idéalement, nous voulons qu'aucun point ne soit mal classé et tombe sur la marge. Mais nous devons relâcher les contraintes qui assurent que chaque point est du côté approprié de son plan d'appui. Tout point tombant du mauvais côté de son plan d'appui sera considéré comme une erreur. Nous voulons simultanément maximiser la marge et minimiser l'erreur. Ceci est résolu grâce à l'addition de variables d'écarts  $\varepsilon_i$   $i = 1, \dots, l$  pour chaque contrainte et ensuite en les ajoutant comme terme de pénalité de poids dans l'objectif.

D'où (2.1) peut être généralisée alors de la manière suivante :

$$y_i(\omega^T x_i + b) \geq 1 - \varepsilon_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, l$$

**Remarque :** Si le point  $x_i$  satisfait (2.1) alors  $\varepsilon_i = 0$  et le problème se réduit à (2.1).

Le problème (2.3) devient :

$$\begin{cases} \min_{\omega, b, \varepsilon} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + C \sum_{i=1}^l \varepsilon_i \\ sc & y_i(\omega^T x_i + b) \geq 1 - \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, l \\ & \varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $C$  est un paramètre qui est à déterminer à l'avance et qui définit le coût des contraintes de violation.

**Remarque :**

1. Le terme  $C \sum_{i=1}^l \varepsilon_i$  peut être considéré comme une mesure de la quantité de mauvaise classification.
2. L'hyperplan de séparation optimal tend à
  - maximiser la distance minimale  $\frac{1}{\|\omega\|}$  pour  $C$  petit.
  - minimiser le nombre de points mal classés pour  $C$  grand.
3. Ce problème est appelé le problème de séparation de marge douce.

Comme pour le cas séparable, (2.8) peut être transformé sous forme d'un problème dual grâce au Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\omega, b, \varepsilon, \alpha, \gamma) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + C \sum_{i=1}^l \varepsilon_i + \sum_{i=1}^l \alpha_i [1 - \varepsilon_i - y_i(\omega^T x_i + b)] - \sum_{i=1}^l \gamma_i \varepsilon_i$$

où les multiplicateurs :

.  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)^T = \alpha \geq 0$  sont associés aux contraintes :  $1 - \varepsilon_i - y_i(\omega^T x_i + b) \leq 0$ .

.  $(\gamma_1, \dots, \gamma_l)^T = \gamma \geq 0$  sont associés aux contraintes :  $-\varepsilon_i \leq 0$ .

Ce qui donne le problème dual suivant :

$$\begin{cases} \max_{\alpha} & -\frac{1}{2} \alpha^T D \alpha + \sum_{i=1}^l \alpha_i \\ \text{sc} & \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq C \quad \forall i = 1, \dots, l \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $D \in \mathbb{R}^{l \times l}$  est tel que :  $D_{ij} = y_i y_j x_i^T x_j \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, l$ .

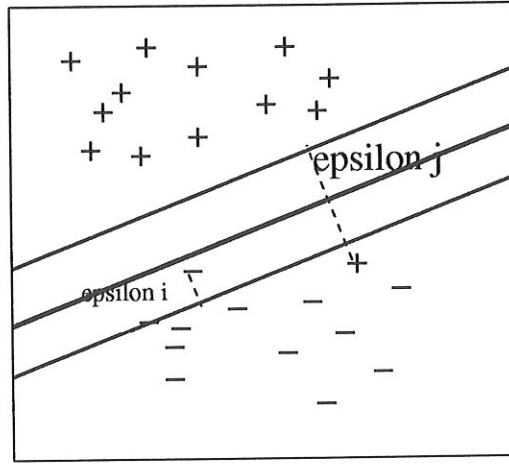


FIG. 2.15 – Interprétation géométrique des  $\varepsilon_i$ .

La solution optimale  $(\bar{\omega}, \bar{b})$  est donnée par :

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^l \bar{\alpha}_i y_i x_i$$

Tandis que  $\bar{b}$  peut encore être déterminé par  $\bar{\alpha}$  ( solution du problème dual (2.9) ) et les conditions de KKT suivantes :

$$\bar{\alpha}_i [1 - \bar{\varepsilon}_i - y_i (\bar{\omega}^T x_i + \bar{b})] = 0 \quad (2.10)$$

$$(\bar{\alpha}_i - C) \bar{\varepsilon}_i = 0 \quad (2.11)$$

où  $\bar{\varepsilon}_i$  est la valeur de  $\varepsilon_i$  au point de selle.



La principale différence par rapport au problème du cas linéairement séparable est que nous devons distinguer les deux cas suivants :

- $\bar{\alpha}_i < C$
- $\bar{\alpha}_i = C$

$$\boxed{\bar{\alpha}_i < C}$$

Etant donné que  $\bar{\alpha}_i$  est strictement inférieur à  $C$ , la relation (2.11) entraîne que  $\bar{\varepsilon}_i = 0$ .

La valeur des  $\bar{\varepsilon}_i$  ainsi remplacée dans l'équation (2.10) nous donne :

$$\bar{\alpha}_i[1 - y_i(\bar{\omega}^T x_i + \bar{b})] = 0$$

Ce qui signifie que les vecteurs de support sont à une distance de  $\frac{1}{\|\bar{\omega}\|}$  de l'hyperplan de séparation optimal.

$$\boxed{\bar{\alpha}_i = C}$$

- Les points sont mal classés si  $\bar{\varepsilon}_i > 1$ .
- Les points sont correctement classés mais plus proche que  $\frac{1}{\|\bar{\omega}\|}$  de l'hyperplan de séparation optimal si  $0 < \bar{\varepsilon}_i < 1$ .
- Dans des cas dégénérés, des points peuvent se trouver sur la marge si  $\bar{\varepsilon}_i = 0$ .

### 2.2.4 Cas non linéaire.

Considérons le problème de classification de la figure (2.16). Une simple fonction de séparation linéaire ne fonctionne pas bien. Une fonc-

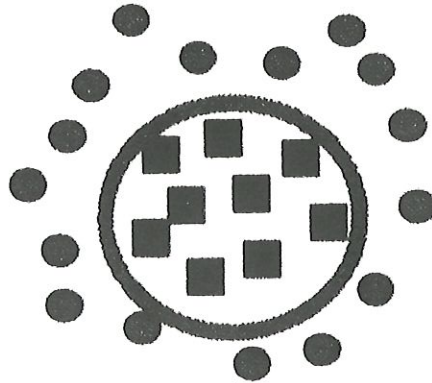


FIG. 2.16 – Exemple demandant une séparation quadratique.

tion quadratique telle que le cercle dessiné (voir figure (2.16)) est nécessaire. Pour construire un séparateur quadratique dans un espace vectoriel à deux dimensions avec des paramètres  $r$  et  $s$ , il faut simplement transformer l'espace des entrées à deux dimensions  $[r, s]$  dans un espace image de dimension plus grande et de construire un séparateur linéaire dans cet espace.

Par chance, la théorie peut être étendue aux surfaces de séparation non linéaires en

- envisageant les points des données comme points de caractéristiques,
- regardant pour un hyperplan de séparation optimal dans l'espace des caractéristiques correspondant.

#### Définition 2.2.14

- Si  $x$  est un point de donnée alors  $\phi(x)$  est défini comme le point de caractéristique correspondant où  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  (espace de Hilbert).
- $\phi_i =$  composantes de  $\phi$ .

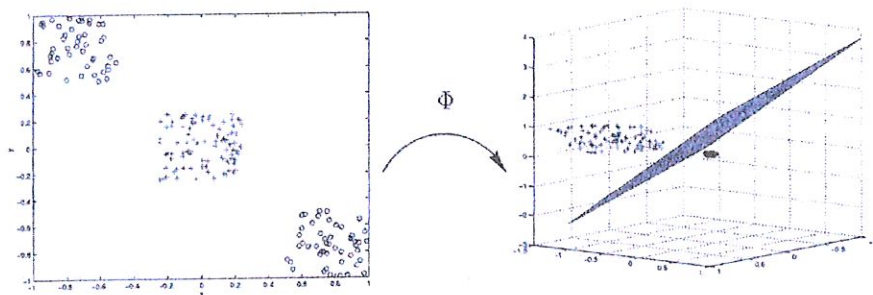


FIG. 2.17 – Pour essayer de séparer les points, on les envoie dans un espace euclidien de dimension plus importante.

**Exemple :** Regardons à présent un autre exemple :

espace des entrées  $:= x = (x_1, x_2)$

espace des images  $:= \phi(x) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{2}x_1x_2, 1)$

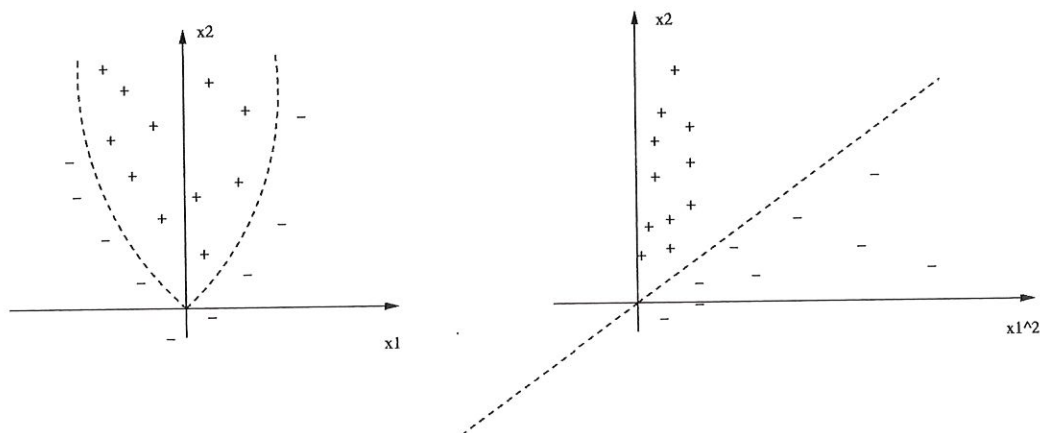


FIG. 2.18 – Représentation géométrique de l'exemple.

Un autre exemple serait :

$$\begin{aligned}
 \theta(x) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^5 \\
 x = [r, s] &\mapsto \theta(x) = [r, s, rs, r^2, s^2] \\
 \omega^T x = \omega_1^T r + \omega_2^T s &\quad \omega^T \theta(x) = \omega_1^T r + \omega_2^T s + \omega_3^T rs + \omega_4^T r^2 + \omega_5^T s^2
 \end{aligned}$$

**Théorème de Saitoh :**

Soit  $X$  un espace des entrées de dimension finie.

Une fonction  $K(x_i, x_j)$  est un noyau valide si et seulement si pour tout ensemble fini, cela donne des matrices de Gram :

$$G_{ij} = K(x_i, x_j)$$

qui sont symétriques :

$$G = G^T$$

et semi-définie positives :

$$\forall \beta \quad \beta^T G \beta \geq 0$$

Comment construire des noyaux valides ?

**Théorème :**

- Soient  $K1$  et  $K2$  des noyaux valides sur  $X \times X$ ,  $X$  inclut dans  $\mathbb{R}^n$ .
- $a \geq 0$ .
- $0 \leq \lambda \leq 1$ .
- $f$  une fonction à valeurs réelles sur  $X$ .
- $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $K3$  un noyau sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ .
- $K$  une matrice symétrique semi-définie positive.
- Alors les fonctions suivantes sont des noyaux valides :

$$K(x, z) = \lambda K1(x, z) + (1 - \lambda) K2(x, z)$$

$$K(x, z) = a K1(x, z)$$

$$K(x, z) = K1(x, z) K2(x, z)$$

$$K(x, z) = f(x) f(z)$$

$$K(x, z) = K3(\phi(x), \phi(z))$$

$$K(x, z) = x^T K z$$

La surface de séparation non linéaire peut être trouvée comme la solution de (2.9) avec  $D_{ij} = y_i y_j K(x_i, x_j)$  tandis que l'étape de classification réduit le calcul par analogie à :

$$\text{sign}\left(\sum_{i=1}^l \bar{\alpha}_i y_i K(x_i, x) + \bar{b}\right)$$

Ce qui donne le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\alpha} & -\frac{1}{2} \alpha^T D \alpha + \sum_{i=1}^l \alpha_i \\ \text{sc} & \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0 \\ & \alpha \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, l \\ & 0 \leq \alpha_i \leq C \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où  $D \in \mathbb{R}^{l \times l}$  tel que  $D_{ij} = y_i y_j K(x_i, x_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, l$ .

Remarquer que les images des données apparaissent uniquement dans le produit scalaire de la fonction objectif.

### **Théoreme 2.2.1**

**Mercer 1909 :**

$$K(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle \text{ où } x, y \in \mathbb{R}^n$$

*si et seulement si*

1.  $K(x, y) = K(y, x)$ .
2.  $\iint K(x, y) f(x) f(y) dx dy \geq 0 \quad \forall f \in L^2$ .

Par ce théorème, nous savons que pour une certaine fonction  $\theta$  donnée et deux points  $u$  et  $v$ , le produit scalaire des points image peut être évalué sans jamais connaître explicitement la fonction, e.g  $\theta(u)\theta(v) = K(u, v)$ .

Voici plusieurs exemples de noyaux :

$\theta(u)$	$K(u, v)$
polynômes de degré $d$	$(u^T v + 1)^d$
fonction à base radiale	$\exp\left(-\frac{\ u - v\ ^2}{2\sigma}\right)$
linéaire	$uv$
sigmoïde	$\tanh(\gamma(u - v) + c)$

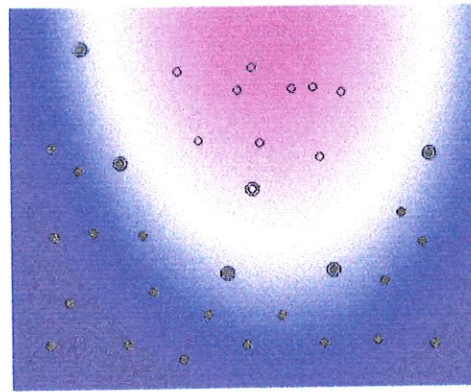


FIG. 2.19 – Exemple avec un noyau polynomial de degré 2.

D'où pour passer d'un séparateur linéaire à un séparateur non linéaire, nous devons uniquement substituer une évaluation du noyau dans l'objectif au lieu du produit scalaire original.

### 2.2.5 Résolution du cas non linéaire.

Le problème (2.12) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\alpha} & F(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha^T D \alpha - e^T \alpha \\ sc & y^T \alpha = 0 \\ & \alpha - Ce \leq 0 \\ & -\alpha \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où  $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^l$ .



**Remarque :** La difficulté de (2.12) était la matrice semi-définie positive  $D$  car  $D_{ij}$  est en général  $\neq 0$  et  $D$  est alors une matrice importante qui nécessite une grande place mémoire pour la stocker. D'où les algorithmes traditionnelles de Newton, Quasi-Newton, etc... ne peuvent s'appliquer. Une des méthodes utilisées pour ce genre de problème est la méthode de décomposition [12].

### Conditions optimales :

Les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes pour le problème d'optimalité (2.13) [12] qui sont :

$$\nabla f(\alpha) + \mu - \lambda + \sigma y = 0 \quad (2.14a)$$

$$\mu^T(\alpha - Ce) = 0 \quad (2.14b)$$

$$\lambda^T \alpha = 0 \quad (2.14c)$$

$$\mu \geq 0 \quad (2.14d)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (2.14e)$$

$$y^T \alpha = 0 \quad (2.14f)$$

$$\alpha - Ce \leq 0 \quad (2.14g)$$

$$-\alpha \leq 0 \quad (2.14h)$$

où  $\sigma \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}_+^l$  sont les multiplicateurs associés à KKT.

Supposons l'existence de  $\alpha_p$  tel que  $0 < \alpha_p < C$ .

$0 < \alpha_i < C$  De (2.14a) et (2.14c) avec  $\nabla F(\alpha) = D\alpha - e$ , on obtient :

$$\boxed{(D\alpha)_i - 1 + \sigma y_i = 0} \quad (2.15)$$

En effet :

si  $\lambda^T \alpha = 0$  avec  $\alpha_i \neq 0$

alors  $\lambda_i = 0$

alors  $\mu^T \underbrace{(\alpha - Ce)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \mu_i \neq 0$

En remplaçant dans (2.14a), on a :

$$D\alpha - e + \sigma y = 0 \iff (D\alpha)_i - 1 + \sigma y_i = 0$$



En notant :

$$(D\alpha)_i = \sum_{j=1}^l y_i y_j K(x_i, x_j) \alpha_j = y_i \sum_{j=1}^l y_j K(x_i, x_j) \alpha_j$$

et en considérant :

$$\sum_{j=1}^l \alpha_j y_j K(x_i, x_j) + b = y_i$$

on obtient :

$$\begin{aligned} (D\alpha)_i &= y_i \underbrace{\sum_{j=1}^l y_j K(x_i, x_j) \alpha_j}_{y_i - b} \\ &= y_i^2 - y_i b \\ &= \frac{y_i - b}{y_i} \\ &= 1 - \frac{b}{y_i} \end{aligned} \tag{2.16}$$

En substituant (2.16) dans (2.15), on obtient :

$$\underbrace{y_i^2}_1 - b y_i - 1 + \sigma y_i = 0 \Rightarrow b y_i = \sigma y_i \Rightarrow \boxed{\sigma = b}$$

D'où à la solution optimale  $\bar{\alpha}$ , la valeur du multiplicateur  $\sigma$  associé à la contrainte  $y^T \alpha = 0$  est égale à la limite optimale  $\bar{b}$ .

$$\boxed{\alpha_i = C}$$

$$(2.14c) \implies \lambda_i = 0$$

On obtient par définition de  $\nabla F(\alpha)$  :

$$(D\alpha)_i - 1 + \mu_i + \sigma = 0 \tag{2.17}$$

En effet :

$$D(\alpha) - e + \mu + \sigma y = 0 \iff (D\alpha)_i - 1 + \sigma y_i + \mu_i = 0$$

En définissant :

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^l \alpha_j y_j K(x_i, x_j) + b$$

et en notant :

$$(D\alpha)_i = y_i \sum_{j=1}^l y_j K(x_i, x_j) \alpha_j$$

on obtient :

$$\boxed{(D\alpha)_i = y_i g(x_i) - y_i b}$$

D'où (2.17) peut être réécrit comme :

$$\boxed{y_i g(x_i) - y_i b - 1 + \mu_i + \sigma y_i = 0}$$

En supposant  $\sigma = b$  et (2.17) et  $\mu_i \geq 0$ , nous obtenons :

$$\boxed{y_i g(x_i) \leq 1}$$

En effet :

$$y_i g(x_i) - y_i \underbrace{(b - \sigma)}_0 - 1 + \underbrace{\mu_i}_{\geq 0} = 0 \implies y_i g(x_i) - 1 + \mu_i = 0 \implies y_i g(x_i) \leq 1$$

$$\boxed{\alpha_i = 0}$$

$$(2.14b) \implies \mu_i = 0$$

Par des calculs et approches similaires au cas précédents, on obtient :

$$\boxed{(D\alpha)_i - 1 - \lambda_i + \sigma y_i = 0}$$

et :

$$\boxed{y_i g(x_i) \geq 1}$$

La méthode suivante fonctionne très bien pour trouver un minimum :

On cherche un  $\alpha^0$  minimum de :

$$\frac{1}{2} \alpha^T D \alpha - \alpha^T 1 \quad (2.18)$$

sous les contraintes :

$$y^T \alpha^0 = 0 \quad (2.19)$$

et

$$0 \leq \alpha_i^0 \leq C, \text{ pour } 1 \leq i \leq l \quad (2.20)$$

On calcule  $b^0$  en utilisant une des inégalités

$$(D\alpha^0)_i + y_i b^0 - 1 = 0 \text{ pour } i \text{ tel que } 0 < \alpha_i < C \quad (2.21)$$

Pour estimer la classe d'un point  $x \in S$ , on calcule

$$f(x) = \text{sign} \left[ \sum_{\text{vecteurs de support}} \alpha_i^0 y_i K(x_i, x) + b^0 \right] \quad (2.22)$$

### Un exemple : le XOR.

Il s'agit de séparer quatre points dans  $\mathbb{R}^2$  comme représentés sur la figure (2.20) où  $x_1 = (0, 0)^T$ ,  $x_2 = (1, 1)^T$ ,  $x_3 = (1, 0)^T$ ,  $x_4 = (0, 1)^T$  et  $y_1 = y_2 = -1$  ainsi que  $y_3 = y_4 = 1$ . Le problème n'étant pas linéairement séparable, il nous faut introduire un noyau adéquat. Prenons simplement  $K : (x, y) \mapsto (xy)^2$ . La matrice du problème (2.18) devient alors :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après un calcul rapide, (2.18) devient à un facteur demi-près :

$$4\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4 - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \quad (2.23)$$

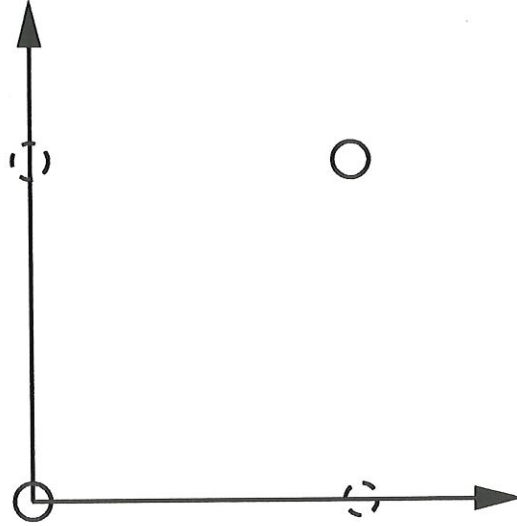


FIG. 2.20 – Le problème du XOR.

Nous devons donc minimiser (2.23) sous les contraintes (2.19) et (2.20). Pour simplifier les calculs, nous allons supposer que  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont égaux à l'optimum. Posons donc

$$\beta = \alpha_3 = \alpha_4$$

et en remplaçant dans (2.23) et (2.19) cherchons à minimiser

$$4\alpha_2^2 + 2\beta^2 - 4\alpha_2\beta - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\beta \quad (2.24)$$

sous les contraintes (2.20) et

$$\alpha_1 = -\alpha_2 + 2\beta \quad (2.25)$$

Maintenant, on voudrait minimiser (2.24) le long de (2.25), ce qui donne en insérant l'expression (2.25) de  $\alpha_1$  dans (2.24) :

$$h(\alpha_2, \beta) = 4\alpha_2^2 + 2\beta^2 - 4\alpha_2\beta - 8\beta$$

Essayons de chercher un minimum sans nous préoccuper des contraintes. Les conditions nécessaires sont alors :

$$\frac{\delta h(\alpha_2, \beta)}{\delta \alpha_2} = 0 \leftrightarrow 2\alpha_2 - \beta = 0$$

et

$$\frac{\delta h(\alpha_2, \beta)}{\delta \beta} = 0 \leftrightarrow \beta - \alpha_2 - 2 = 0$$

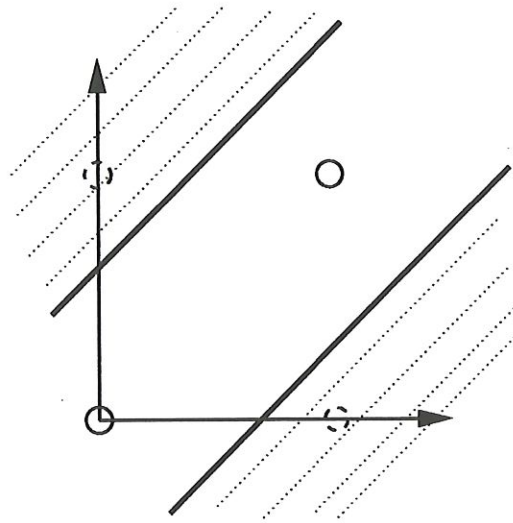


FIG. 2.21 – La surface de décision.

La solution de ce système est  $\alpha_2 = 2$  et  $\beta = 4$ .

En utilisant (2.21) pour  $i=1$  par exemple, on en déduit immédiatement  $b = -1$ .

Les  $\alpha_i$  et  $b$  vérifient les conditions de KKT. Une solution de notre problème est donc  $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = \alpha_4 = 4$ .

Essayons de tracer la surface de décision  $f(x, y) \geq 0 \in \mathbb{R}^2$ , où  $f$  dans (2.21) vaut ici :

$$f(x, y) = [2x^2 + 2y^2 - 4xy - 1] = \text{sign}[2(x - y)^2 - 1]$$

La surface de décision est donc délimitée par les droites d'équation  $y = x \pm \frac{1}{2}$ . Son allure est donnée à la figure (2.21).

### Stratégie d'amélioration :

Les conditions optimales ainsi tirées sont essentielles afin d'inventer une stratégie de décomposition qui garanti qu'à chaque itération la fonction objectif est améliorée.

Pour faire cela : on partitionne l'ensemble d'index  $1, 2, \dots, l$  en 2 ensembles B et N où l'ensemble B est appelé *l'ensemble de base* et N est appelé *l'ensemble hors base*.

On décompose alors  $\alpha$  en deux vecteurs  $\alpha_B$  et  $\alpha_N$  :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

La fonction objectif de (2.13) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_B^T & \alpha_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{BB} & D_{BN} \\ D_{NB} & D_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \alpha_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_B^T & e_N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \alpha_N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_B^T D_{BB} \alpha_B + \alpha_B^T D_{BN} \alpha_N + \alpha_N^T D_{NB} \alpha_B + \alpha_N^T D_{NN} \alpha_N) - e_B^T \alpha_B - e_N^T \alpha_N \\ &\text{où } \frac{1}{2} \alpha_N^T D_{NN} \alpha_N - e_N^T \alpha_N \text{ est constant.} \end{aligned}$$

**Remarque :**  $K(x, y)$  étant symétrique, le calcul de  $\alpha_B^T D_{BN} \alpha_N + \alpha_N^T D_{NB} \alpha_B$  peut être remplacé par :

$$\alpha_B^T (D_{BN} \alpha_N + D_{NB}^T \alpha_N) = 2\alpha_B^T D_{BN} \alpha_N = 2\alpha_B^T q_{BN}$$

où

$$(q_{BN})_i = (D_{BN} \alpha_N)_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} y_i y_j K(x_i, x_j) \alpha_j = y_i \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j y_j K(x_i, x_j) \quad (i \in B).$$

On définit alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\alpha_B} & F(\alpha_B) = \frac{1}{2} \alpha_B^T D_{BB} \alpha_B - (e_B - D_{BN} \alpha_N)^T \alpha_B \\ sc & y_B^T \alpha_B = -y_N^T \alpha_N \\ & 0 \leq (\alpha_B)_i \leq C \quad \forall i = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $|B| = q$ .

**Remarque :**

1. On peut remplacer tout  $\alpha_i, i \in B$  par tout  $\alpha_j, j \in \mathbb{N}$  sans changer la fonction objectif ou la réalisation des deux sous problèmes et le problème original [12].
2. Si le sous-problème est optimal avant un tel remplacement, le nouveau sous-problème est optimal si et seulement si  $\alpha_j$  satisfait les conditions optimales pour le cas approprié.

**proposition 2.2.1**

*Si on remplace une variable de  $B$  par  $N$ , la fonction objectif reste inchangée et la solution est réalisable pour le sous-problème.*

**proposition 2.2.2**

*Si on change une variable qui ne satisfait pas les conditions d'optimalité de  $N$  en une variable de  $B$  alors la fonction objectif s'améliore quand le sous-problème est réoptimisé.*

**Algorithme de décomposition d'Osuma-Freund-Girosi :**

- 1 Choisir arbitrairement  $q = |B|$  points dans l'ensemble de départ.
- 2 Résoudre le sous-problème défini par les variables de  $B$ .
- 3 Tant qu'il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que :

$$0 < \alpha_j < Cy_j g(x_j) \neq 1$$

$$\alpha_j = Cy_j g(x_j) > 1$$

$$\alpha_j = 0y_j g(x_j) < 1$$

remplacer tout  $\alpha_i, i \in B$  par  $\alpha_j$  et résoudre le nouveau sous-problème donné par (2.26).

**Remarque :** Puisque la fonction objectif est bornée, l'algorithme "doit converger" vers la solution optimale globale en un nombre fini d'itérations. Il n'y a pas de preuve théorique.



Pour décrire l'algorithme, on remplace (2.13) par le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\alpha} & f(\alpha) \\ sc & \alpha \in \Omega \end{cases} \quad (2.27)$$

où :

- $f : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$  est continuellement différentiable.
- $\Omega$  est l'ensemble réalisable de (2.13)  
 $= \{\alpha | y^T \alpha = 0; 0 \leq \alpha_i \leq C; \forall i = 1, 2, \dots, l\}.$
- $C$  est supposé strictement supérieur à 0.

Cela implique alors que  $\Omega$  est un ensemble borné.

### Algorithme :

Pas 1 :

Soit  $2 \leq q \leq l; k := 1.$

Choisir  $\mu_1, \mu_2 \in ]0, 1[; \gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \alpha^1 = \text{point optimal}.$

Pas 2 :

Résoudre :

$$\begin{cases} \min_d & \nabla f(\alpha^k)^T d \\ sc & \alpha^k + d \in \Omega \\ & |\{d_i | d_i \neq 0\}| \leq q \end{cases}$$

où on suppose que  $B^k$  contient des indices pour lesquels  $d_i \neq 0.$

Pas 3 :

Si  $d = 0$ , on s'arrête car  $\alpha^k$  est un point optimal ;

sinon,

mettre :

$$(\tilde{\nabla} f(\alpha^k))_i = \begin{cases} \nabla f(\alpha^k) & \text{si } i \in B^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définir :

- $\Omega^k = \{\alpha | \alpha \in \Omega; \alpha_i = (\alpha^k)_i, i \notin B^k\}$
- $\mathbb{R}_i^k = \{\alpha | \alpha \in \mathbb{R}^l; \alpha_i = (\alpha^k)_i, i \notin B^k\}$
- $P_k : \mathbb{R}_i^k \mapsto \Omega^k$  tel que  $\alpha \mapsto P_k(\alpha) = \operatorname{argmin}_{z \in \Omega^k} \|z - \alpha\|$

$\forall t \geq 0$ , définir :

$$\alpha^k(t) = P_k(\alpha^k - t \tilde{\nabla} f(\alpha^k))$$

Choisir  $t_k > 0$  tel que :

- $\alpha_C^k = P_k(\alpha^k - t_k \tilde{\nabla} f(\alpha^k)) = \text{point de Cauchy}$
- $f(\alpha_C^k) \leq f(\alpha^k) + \mu_1 \tilde{\nabla} f(\alpha^k)^T (\alpha_C^k - \alpha^k)$
- $t_k \geq \gamma_1$  ou  $t_k \geq \gamma_2$   $t_k > 0$
- où  $t_k$  satisfait à :  $f(\alpha^k(t_k)) > f(\alpha^k) + \mu_2 \nabla(\alpha^k)^T (\alpha^k(t_k) - \alpha^k)$

Pas 4 :

Trouver un nouvel  $\alpha^{k+1}$  tel que :

$$\begin{cases} (\alpha^{k+1})_j = (\alpha^k)_j & \text{si } j \notin B^k \\ f(\alpha^{k+1}) \leq f(\alpha_C^k) \end{cases}$$

Retourner au pas 2.

## 2.3 Régression des SVMs.

### 2.3.1 Introduction.

Pour la classification linéaire séparable, le primal SVM trouve le plan de séparation avec la marge "dure" maximale entre les ensembles. Le dual équivalent SVM calcule les points les plus proches dans les enveloppes convexes des données de chaque classe. Pour le cas inséparable, le primal SVM optimise la marge "douce" de séparation entre les deux classes. Le dual correspondant trouve les points les plus proches dans les enveloppes convexes réduites. Nous allons décrire des arguments analogues pour la régression SVM.

Une explication géométrique pour la régression sera faite à l'aide de la *fonction perte  $\epsilon$ -insensible*. Pour un  $\epsilon > 0$  fixé, l'existence d'un  $\epsilon$ -tube parfait ou "dur" sera mise en question. On verra, avec l'analyse de la dualité, que l'existence d'un  $\epsilon$ -tube dépend de la séparabilité des deux ensembles considérés. Ces deux ensembles consistent en des données augmentées avec la variable *réponse* bougée de bas en haut d'une valeur  $\epsilon$ . Dans l'espace dual, la régression devient un problème de classification, les formulations géométriques développées pour le cas simple deviennent applicables pour la régression. La formulation résultante sera appelée *C-SVR*. Celle-ci repose sur les enveloppes convexes des données augmentées et calcule les points les plus proches dans les enveloppes convexes augmentées. Les plans de marge maximale correspondants définiront l' $\epsilon$ -tube. Similairement, pour calculer un  $\epsilon$ -tube doux, on utilisera la forme *RC-SVR* qui trouvera les points les plus proches des enveloppes convexes réduites.

### 2.3.2 Quand y-a-t-il l'existence d'un $\epsilon$ -tube ?

#### Définition 2.3.1

La fonction perte  $\epsilon$ -insensible est définie comme :

$$L^\epsilon(x, y, f) = |y - f(x)|_\epsilon = \max(0, |y - f(x)| - \epsilon)$$

Sur la figure (2.22), en dessinant les points suivants les axes de coordonnées, on constate que pour un modèle de régression parfait les données tombent dans un  $\epsilon$ -tube "dur". Soit  $(X_i, y_i)$  où  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $X_i$  est le  $i$ ème vecteur de prédiction et  $y_i$  leur réponse. Les données sont alors  $(x, y)$  où  $X_i$  est une ligne de la matrice  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $y \in \mathbb{R}^m$  est la réponse.

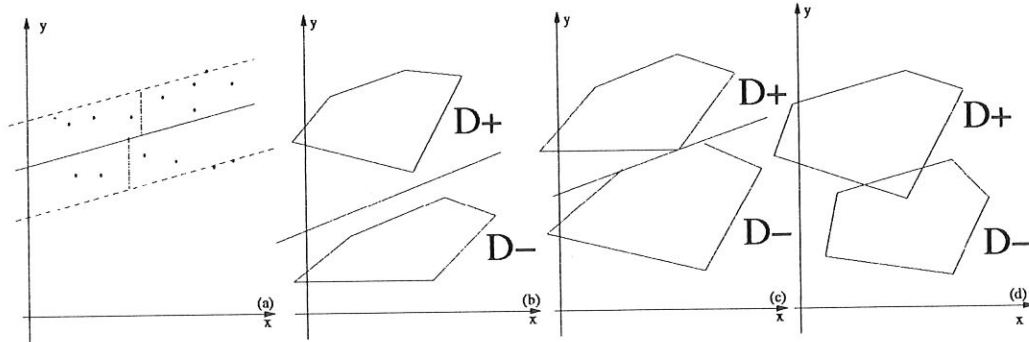


FIG. 2.22 – (a)  $\epsilon_0$ -tube "dur" primal ; (b) dual strictement séparable  $\epsilon > \epsilon_0$ , (c) dual séparable  $\epsilon = \epsilon_0$ , (d) dual inséparable  $\epsilon < \epsilon_0$ .

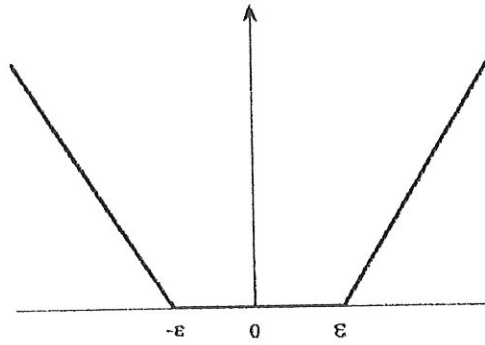


FIG. 2.23 – Une fonction perte  $\epsilon$ -insensible par morceau.

### Définition 2.3.2

Un  $\epsilon$ -tube "dur" pour un  $\epsilon > 0$  fixé est défini comme un plan d'équation  $y = \omega^T x + b$  tel que :

$$-\epsilon e \leq y - X\omega - be \leq \epsilon e$$

où  $e$  est un vecteur unitaire de dimension  $m$ .

Pour un  $\epsilon$  assez grand, il existera toujours un  $\epsilon$ -tube.

### Définition 2.3.3

Le plus petit des  $\epsilon$ -tube est appelé l' $\epsilon_0$ -tube.

Celui-ci peut se trouver par l'optimisation du problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\omega, b, \epsilon} & \epsilon \\ \text{sc} & -\epsilon e \leq y - X\omega - be \leq \epsilon e \end{cases} \quad (2.28)$$

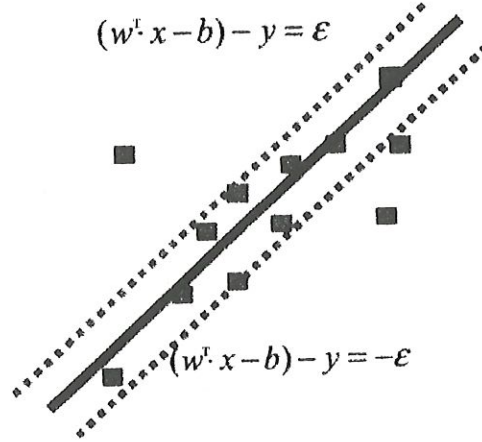


FIG. 2.24 – Dessin d'un  $\epsilon$ -tube. Les points en dehors sont considérés comme des erreurs.

Soient  $D^+$  et  $D^-$  formés en augmentant les données avec la variable de réponse respectivement augmentée et diminuée par  $\epsilon$ , i-e :

- $D^+ = \{(X_i, y_i + \epsilon); i = 1, 2, \dots, m\}$
- $D^- = \{(X_i, y_i - \epsilon); i = 1, 2, \dots, m\}$

Considérons le problème de la figure (2.22 point a) pour  $\epsilon > 0$  fixé, il existe trois cas possibles :

1.  $\epsilon > \epsilon_0$  : un  $\epsilon$ -tube "dur" strict existe.
2.  $\epsilon = \epsilon_0$  : uniquement l' $\epsilon_0$ -tube existe.
3.  $\epsilon < \epsilon_0$  : aucun  $\epsilon$ -tube "dur" existe.

La figure (2.22 points (b-d)) illustre ce qu'il arrive dans l'espace dual pour chaque cas. Les enveloppes convexes de  $D^+$  et  $D^-$  sont dessinées avec le plan de marge maximale dans la figure 1-b et le plan de support dans la figure 1-c pour des enveloppes convexes séparées.

Clairement, l'existence d'un  $\epsilon$ -tube est directement liée à la séparabilité de  $D^+$  et  $D^-$ . Si la valeur de  $\epsilon$  est strictement supérieure à la valeur de  $\epsilon_0$  alors un tube strict existe et les enveloppes convexes des ensembles constitués de  $D^+$  et  $D^-$  sont strictement séparables.

#### Définition 2.3.4

Soient  $D^+$  et  $D^-$  deux ensembles non vides.

Un plan  $H$  d'équation  $\{x | \omega^T x = \alpha\}$  sépare  $D^+$  et  $D^-$  si :

- $\omega^T x \geq \alpha, \forall x \in D^+.$
- $\omega^T x \leq \alpha, \forall x \in D^-.$



### Définition 2.3.5

$H$  sépare strictement  $D^+$  et  $D^-$  si :

- $\omega^T x \leq \alpha + \Delta, \forall x \in D^+.$
- $\omega^T x \geq \alpha - \Delta, \forall x \in D^-.$

Il existe une infinité d' $\epsilon$ -tubes possibles lorsque la valeur de  $\epsilon$  est strictement supérieure à la valeur de  $\epsilon_0$ . Si un  $\epsilon$ -tube "dur" existe pour une valeur de  $\epsilon$  strictement supérieure à 0 donnée, alors les enveloppes convexes des ensembles  $D^+$  et  $D^-$  seront séparables. Ou encore, de manière mathématique :

$$\begin{aligned} \exists (\omega, b) \text{ tel que } & (y + \epsilon e) - X\omega - be \geq 0 \\ & (y - \epsilon e) - X\omega - be \leq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pour toute combinaison convexe de  $D^+ := \left( \begin{array}{c} X^T \\ (y + \epsilon e)^T \end{array} \right) u$  où  $e^T u = 1, u \geq 0$  de points  $(X_i, y_i + \epsilon), i = 1, 2, \dots, m$ , nous avons :

$$(y + \epsilon e)^T u - \omega^T (X^T u) - b \geq 0$$

Similairement, pour  $D^-$ , avec  $\left( \begin{array}{c} X^T \\ (y - \epsilon e)^T \end{array} \right) v$  où  $e^T v = 1, v \geq 0$  de points  $(X_i, y_i - \epsilon), i = 1, 2, \dots, m$ , nous avons :

$$(y - \epsilon e)^T v - \omega^T (X^T v) - b \leq 0$$

Alors le plan d'équation  $y = \omega^T x + b$  dans l' $\epsilon$ -tube sépare les deux enveloppes convexes. On remarque que le plan de séparation et le plan de l' $\epsilon$ -tube sont égaux. S'il n'existe pas de plan de séparation, alors il n'existe pas non plus d' $\epsilon$ -tube. Le théorème de Gale de l'alternative, à savoir :

#### Théoreme 2.3.1

Pour une matrice donnée  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et un vecteur donné  $c \in \mathbb{R}^m$ , on a soit :

$$Ax \leq c \text{ a une solution } x \in \mathbb{R}^n$$

ou

$$\begin{cases} A^T y = 0 \\ cy = -1 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ a une solution } y \in \mathbb{R}^m$$

mais jamais les deux.



peut être utilisé pour caractériser l' $\epsilon$ -tube.

Conditions d'existence d'un  $\epsilon$ -tube "dur" :

**Théoreme 2.3.2**

Un  $\epsilon$ -tube "dur" existe pour  $\epsilon > 0$  donné si et seulement si le système suivant n'a pas de solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^T u = X^T v \\ e^T u = e^T v = 1 \\ (y + \epsilon e)^T u - (y - \epsilon e)^T v < 0 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

**preuve 1**

Par (2.29), on a un  $\epsilon$ -tube si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} (y + \epsilon e) - X\omega - be \geq 0 \\ (y - \epsilon e) - X\omega - be \leq 0 \end{array} \right.$$

Par le théorème de Gale (voir annexe), le système (2.29) a une solution si et seulement si le système alternatif suivant n'a pas de solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^T u = X^T v \\ e^T u = e^T v \\ (y + \epsilon e)^T u - (y - \epsilon e)^T v = -1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{array} \right.$$

□

Conséquences de ce théorème :

Si  $D^+$  et  $D^-$  sont deux ensembles séparables, alors un  $\epsilon$ -tube existe.

### 2.3.3 Construction d'un $\epsilon$ -tube.

Pour toute valeur de  $\epsilon$  strictement supérieure à la valeur de  $\epsilon_0$ , une infinité d' $\epsilon$ -tubes existe. Lequel de ces  $\epsilon$ -tubes peut être utilisé? Le programme linéaire (2.28) peut être résolu pour trouver l' $\epsilon_0$ -tube. Dans la classification SVM, la formulation duale construit un plan de marge maximale en trouvant les deux points les plus proches des enveloppes convexes des deux classes. Le plan de marge maximale est le plan bisectant ces deux points. Nous savons aussi que l'existence d'un tube est lié à la séparabilité des ensembles augmentés  $D^+$  et  $D^-$ . La clef résulte dans le fait que le problème de régression peut être vu comme un problème de classification entre les deux ensembles  $D^+$  et  $D^-$ . Nous aurons deux cas à considérer :

1.  $\epsilon$ -tube "dur".
2.  $\epsilon$ -tube "doux".

#### $\epsilon$ -tube "dur"

Nous allons maintenant appliquer la méthode duale des enveloppes convexes afin de construire le plan de marge maximale pour nos ensembles augmentés  $D^+$  et  $D^-$  en supposant qu'ils sont strictement séparables ; i-e que la valeur de  $\epsilon$  est strictement supérieure à la valeur de  $\epsilon_0$ .

Le problème est illustré à la figure (2.25). Les points les plus proches des ensembles  $D^+$  et  $D^-$  peuvent être trouvés en résolvant le programme dual quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{u,v} & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} X^T \\ (y + \epsilon e)^T \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} X^T \\ (y - \epsilon e)^T \end{pmatrix} v \right\|^2 \\ sc & e^T u = 1 \\ & e^T v = 1 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

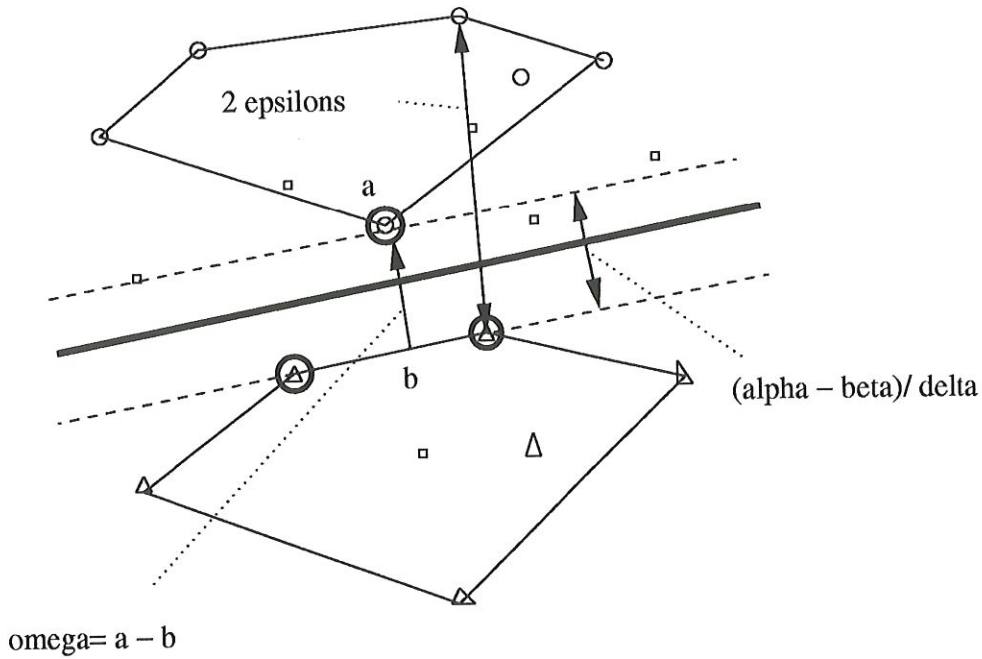


FIG. 2.25 – Solution d'un  $\bar{\epsilon}$ -tube trouvé par C-SVR peut avoir  $\bar{\epsilon} < \epsilon$ . Les  $\square$  sont les données originelles, les  $\circ$  sont dans  $D^+$  et les  $\nabla$  dans  $D^-$ . Les vecteurs de support sont 0.

Soient les points les plus proches des enveloppes convexes des ensembles  $D^+$  et  $D^-$  définis respectivement par :

$$a = \begin{pmatrix} X^T \\ (y + \epsilon e)^T \end{pmatrix} \hat{u}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} X^T \\ (y - \epsilon e)^T \end{pmatrix} \hat{v}$$

Le plan de séparation de marge maximale bissecte ces deux points. La normale  $(\hat{\omega}, \hat{\delta})$  au plan est la différence entre ces points, i-e :

$$\hat{\omega} = X^T \hat{u} - X^T \hat{v}$$

et

$$\hat{\delta} = (y + \epsilon e)^T \hat{u} - (y - \epsilon e)^T \hat{v}$$

**Définition 2.3.6**

Le seuil  $\hat{b}$  est la distance de l'origine au point à mi-chemin entre les points les plus proches le long de la normale.

$$\hat{b} = \left( \frac{X^T \hat{u} + X^T \hat{v}}{2} \right)^T \hat{\omega} + \left( \frac{y^T \hat{u} + y^T \hat{v}}{2} \right) \hat{\delta}$$

Le plan de séparation a l'équation suivante :  $\hat{\omega}^T x + \hat{\delta} y - \hat{b} = 0$ .

Le primal du problème (2.31) est :

$$\begin{cases} \min_{\omega, \delta, \alpha, \beta} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \delta^2 - (\alpha - \beta) \\ sc & X\omega + \delta(y + \epsilon e) - \alpha e \geq 0 \\ & X\omega + \delta(y - \epsilon e) - \beta e \leq 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Les plans de support pour  $D^+$  et  $D^-$  déterminent les bords inférieur et supérieur de l' $\epsilon$ -tube respectivement. Les vecteurs de support de  $D^+$  et  $D^-$  correspondent aux points se trouvant le long des bords inférieur et supérieur de l' $\epsilon$ -tube.(figure (2.25)).

Voici un théorème sur la construction d'un  $\epsilon$ -tube par C-SVR ( cf problème 2.31 ) :

**Théoreme 2.3.3**

Soit le plan de marge maximale obtenu par C-SVR (2.31) d'équation

$$\hat{\omega}^T x + \hat{\delta} y - \hat{b} = 0$$

où :

$$\hat{\omega} = X^T \hat{u} - X^T \hat{v}$$

$$\hat{\delta} = (y + \epsilon e)^T \hat{u} - (y - \epsilon e)^T \hat{v}$$

$$\hat{b} = \left( \frac{X^T \hat{u} + X^T \hat{v}}{2} \right)^T \hat{\omega} + \left( \frac{y^T \hat{u} + y^T \hat{v}}{2} \right) \hat{\delta}$$

Si  $\epsilon > \epsilon_0$

alors le plan d'équation  $y = \omega^T x + b$  correspond à un  $\hat{\epsilon}$ -tube de données  $(X_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m$  où :

$$\omega = -\frac{\hat{\omega}}{\hat{\delta}}$$

$$b = \frac{\hat{b}}{\hat{\delta}}$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}} < \epsilon.$$

**preuve 2**

1)  $\hat{\delta} > 0$

Par théorème de dualité de Wolfe [10],  $(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) > 0$ .

Définissons  $\hat{b} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2}$

$\hat{\omega}, \hat{\delta}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$  satisfont les contraintes du problème (2.32), i-e :

$$X\hat{\omega} + \hat{\delta}(y + \epsilon e) - \hat{\alpha} e \geq 0$$

$$X\hat{\omega} + \hat{\delta}(y - \epsilon e) - \hat{\beta} e \leq 0$$

En soustrayant la seconde inégalité de la première, on obtient :

$$2\hat{\delta}\epsilon - \hat{\alpha} + \hat{\beta} \geq 0$$

En effet,

$$\begin{aligned} & X\hat{\omega} + \hat{\delta}(y + \epsilon e) - \hat{\alpha}e \\ & -(X\hat{\omega} + \hat{\delta}(y - \epsilon e) - \hat{\beta}e) \\ & = 2\hat{\delta}\epsilon - \hat{\alpha}e + \hat{\beta}e \geq 0 \end{aligned}$$

i-e  $\hat{\delta} \geq \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\epsilon} > 0$  car  $\epsilon > \epsilon_0 \geq 0$ .

$$\left( \hat{\delta} \geq \hat{\delta} - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\epsilon} \geq 0 \right)$$

En soustrayant  $\hat{\delta}$  et en renversant les signes, on obtient bien que  $\hat{\delta} > 0$ .

2) Soit  $\omega = -\frac{\hat{\omega}}{\hat{\delta}}$ , les inégalités deviennent :

$$\begin{aligned} X\omega - y &\leq \epsilon e - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\delta}} e \\ X\omega - y &\geq -\epsilon e - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\delta}} e \end{aligned}$$

En effet (pour la première uniquement, l'autre est analogue) :

$$X\hat{\omega} + \hat{\delta}y + \hat{\delta}\epsilon e - \hat{\alpha}e \geq 0$$

Or

$$\omega = -\frac{\hat{\omega}}{\hat{\delta}} \Rightarrow \hat{\omega} = -\omega\hat{\delta}$$

d'où :

$$-X\omega\hat{\delta} + \hat{\delta}y + \hat{\delta}\epsilon e - \hat{\alpha}e \geq 0$$

$$\iff -X\omega\hat{\delta} + \hat{\delta}y + \hat{\delta}\epsilon e \geq \hat{\alpha}e$$

$$\iff \hat{\delta}(-X\omega + y + \epsilon e) \geq \hat{\alpha}e$$

$$\iff -X\omega + y + \epsilon e \geq \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{\alpha}e$$

$$\iff -X\omega + y \geq \frac{1}{\hat{\delta}} \hat{\alpha}e - \epsilon e$$

$$\iff X\omega - y \leq \epsilon e - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\delta}} \epsilon e$$

Soit  $b = \frac{\hat{b}}{\hat{\delta}}$ , alors :



$$\begin{aligned}\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\delta}} &= b + \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}} \\ \frac{\hat{\beta}}{\hat{\delta}} &= b - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}}\end{aligned}$$

En substituant dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}X\omega - y &\leq \left( \epsilon - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}} \right) e - be \\ X\omega - y &\geq - \left( \epsilon - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}} \right) e - be\end{aligned}$$

Or

$$\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}} < \epsilon$$

d'où :

$$X\omega - y + be \leq \hat{\epsilon}e$$

$$X\omega - y + be \geq -\hat{\epsilon}e$$

D'où le plan d'équation  $y = \omega^T x + b$  est le milieu du  $\hat{\epsilon} < \epsilon$ -tube.

□

### **$\epsilon$ -tube "doux"**

Pour toute valeur de  $\epsilon$  strictement inférieure à la valeur de  $\epsilon_0$ , il n'existe pas toujours un  $\epsilon$ -tube "dur". Dans la classification de marge "douce", les outliners sont traités dans l'espace dual en utilisant l'enveloppe convexe réduite. La même stratégie apparaît pour les  $\epsilon$ -tubes "doux" ( voir figure (2.26)).

Au lieu de prendre les enveloppes convexes complètes des ensembles  $D^+$  et  $D^-$ , nous réduisons les enveloppes convexes le long des frontières difficiles. RC-SVR défini par le problème suivant calcule les points les plus proches des

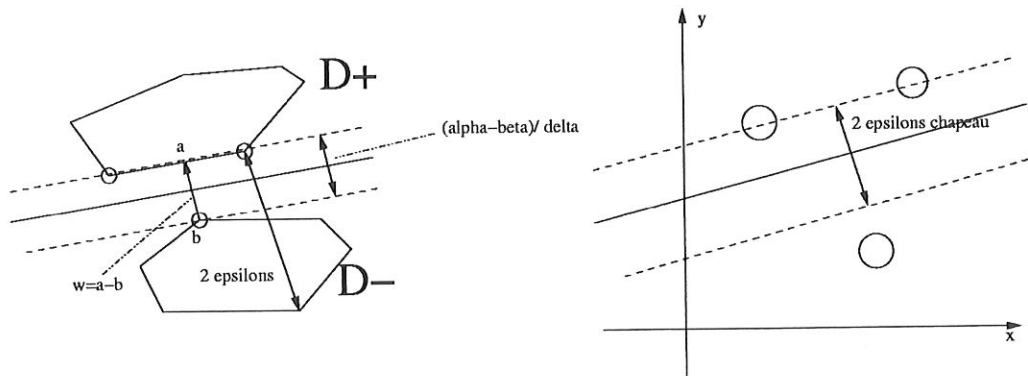


FIG. 2.26 –  $\epsilon$ -tube trouvé par RC-SVR; à gauche dans l'espace dual-à droite dans l'espace primal.

enveloppes convexes réduites pour  $\frac{1}{m} \leq C \leq 1$  fixé :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{u,v} & \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} X^T \\ (y + \epsilon e)^T \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} X^T \\ (y - \epsilon e)^T \end{pmatrix} v \right\|^2 \\ sc & e^T u = 1 \\ & e^T v = 1 \\ & 0 \leq u \leq C e \\ & 0 \leq v \leq C e \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Le paramètre  $C$  détermine la robustesse de la solution en contrôlant l'enveloppe convexe réduite.  $C$  limite l'influence de tout point isolé où  $C = \frac{1}{k}$  où  $0 < k < m$ . La figure (2.26) est représentée pour  $k = 2$ , chaque point de l'enveloppe convexe réduite doit dépendre d'au moins deux points de donnée.  $k$  est la borne inférieure sur le nombre de points qui doivent être utilisés pour déterminer le point le plus proche de chaque ensemble. Puisqu'ils sont les vecteurs de support,  $2k$  est une borne inférieure sur le nombre de vecteurs de support dans notre problème défini par RC-SVR (2.33). En choisissant  $k$  suffisamment grand, le cas inséparable avec la valeur de  $\epsilon$  strictement inférieure à la valeur de  $\epsilon_0$  est transformé en cas séparable où nos points les plus proches dans le problème de l'enveloppe convexe sont bien définis.

Comme dans la classification, le problème dual de l'enveloppe convexe réduite correspond à calculer un  $\epsilon$ -tube "doux" dans l'espace primal. Considérons le tube "doux" du primal C-SVR (2.32), lequel a son dual de Wolfe

RC-SVR (2.33) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \delta, \alpha, \beta, \xi, \eta} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 + \frac{1}{2} \delta^2 - (\alpha - \beta) + D(e^T \xi + e^T \eta) \\ sc & X\omega + \delta(y + \xi e) - \alpha e + \xi \geq 0 \\ & X\omega + \delta(y - \xi e) - \beta e - \eta \leq 0 \\ & \xi \geq 0 \\ & \eta \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Construction d'un  $\bar{\epsilon}$ -tube "doux"

**Théoreme 2.3.4**

Soit le plan de marge "douce" obtenu par RC-SVR (2.33) d'équation

$$\hat{\omega}^T x + \hat{\delta} y - \hat{b} = 0$$

où :

$$\hat{\omega} = X^T \hat{u} - X^T \hat{v}$$

$$\hat{\delta} = (y + \epsilon e)^T \hat{u} - (y - \epsilon e)^T \hat{v}$$

$$\hat{b} = \left( \frac{X^T \hat{u} + X^T \hat{v}}{2} \right) \hat{\omega} + \left( \frac{y^T \hat{u} + y^T \hat{v}}{2} \right) \hat{\delta}$$

Si  $0 < \epsilon < \epsilon_0$

alors le plan d'équation  $y = \omega^T x + b$  correspond à un  $\hat{\epsilon}$ -tube "doux" de données  $(X_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m$  où :

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\hat{\omega}}{\hat{\delta}} \\ b &= \frac{\hat{b}}{\hat{\delta}} \\ \hat{\epsilon} &= \epsilon - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{2\hat{\delta}} < \epsilon. \end{aligned}$$

## Chapitre 3

# Le problème sous forme matricielle.

### 3.1 Notation.

Avant de commencer ce chapitre, un petit mot sur la notation. Pour un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_+$  dénotera le vecteur  $\in \mathbb{R}^n$  avec les composantes  $(x_+)_i := \max_{i=1, \dots, n} \{x_i, 0\}$ . La notation  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  signifiera une matrice réelle  $m \times n$ . Pour une telle matrice,  $A^T$  dénotera la transposée tandis que  $A_i$  dénotera la  $i$ ème ligne de la matrice  $A$ . Il est évident que ces notations conviennent également pour la matrice  $B$ . La norme-1 de  $x = \sum_{i=1}^n |x_i|$  sera notée  $\|x\|_1$  tandis que la norme- $\infty$  de  $x = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  sera notée  $\|x\|_\infty$ . Un vecteur composé uniquement de 1 dans un espace de dimension quelconque sera noté  $e$ .

### 3.2 Idée centrale.

Etant donnés deux ensembles de données  $\in E^n$  (= espace euclidien de dimension  $n$ ) représentés par les matrices  $A(m \times n)$  et  $B(k \times n)$  respectivement, il faut établir un critère pour distinguer les éléments des deux ensembles.

Si les enveloppes convexes des deux ensembles ne s'intersectent pas, un tel critère est défini par un hyperplan de séparation strict construit de sorte que tous les points d'un ensemble soient d'un côté de l'hyperplan et tous les points de l'autre se situent de l'autre côté.

Bien souvent, les deux ensembles  $A$  et  $B$  ont des enveloppes convexes qui s'intersectent, d'où une impossibilité de séparation stricte par un hyperplan de séparation. Il faudra alors, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, considérer les enveloppes convexes réduites respectivement de  $A$  et  $B$

pour séparer ces deux ensembles.

Notre programme linéaire est basé sur le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\omega, \gamma} \frac{1}{m} \|(-A\omega + e\gamma + e)_+\|_1 + \frac{1}{k} \|(B\omega - e\gamma + e)_+\|_1 \quad (3.1)$$

où

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  représente les  $m$  points contenus dans l'ensemble  $A$ .
- $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$  représente les  $k$  points contenus dans l'ensemble  $B$ .
- $\omega$  est le vecteur de poids de dimension  $n$  représentant la normale à l'hyperplan de séparation optimal.
- $\gamma$  est un seuil qui donne la position de l'hyperplan de séparation d'équation  $\omega^T x = \gamma$ .

Le choix des poids  $\frac{1}{m}$  et  $\frac{1}{k}$  dans (3.1) est critique comme nous montrerons grâce au théorème 3.4.2. Notre choix est naturel dans le sens où l'inutilité de la solution  $\omega = 0$  n'est pas rencontrée dans les ensembles linéairement inséparables. Ceci est théoriquement justifié par le théorème 3.4.2 car  $\omega = 0$  ne peut être solution sauf si l'égalité suivante entre la moyenne arithmétique de  $A$  et  $B$  donne :

$$\frac{e^T A}{m} = \frac{e^T B}{k} \quad (3.2)$$

Cependant dans ce cas, il est garanti qu'un optimum  $\omega \neq 0$  existe en plus de  $\omega = 0$  (théorème 3.4.3).

### 3.3 Cas linéairement séparable.

#### Définition 3.3.1

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  un point à classer. Un perceptron de poids  $\omega$  et de seuil  $\gamma \in \mathbb{R}$  est défini par :

- $x^T \omega - \gamma > 0 \implies x \in A$ .
- $x^T \omega - \gamma < 0 \implies x \in B$ .

Le perceptron détermine l'hyperplan de séparation d'équation  $x^T \omega = \gamma$ , où  $\omega$  est le vecteur normal au plan et la valeur  $\frac{|\gamma|}{\|\omega\|}$  est la distance euclidienne de l'hyperplan à l'origine.

Les coordonnées des points appartenant à l'ensemble  $A$  sont données par les  $m$  lignes de la matrice  $A(m \times n)$  et les coordonnées des points appartenant à l'ensemble  $B$  sont données par les  $k$  lignes de la matrice  $B(k \times n)$ .



**Définition 3.3.2**

Les ensembles  $A$  et  $B$  sont linéairement séparables si  $\exists \omega$  et  $\gamma$  tel que :

$$\begin{aligned} A\omega &> e\gamma \\ B\omega &< e\gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

ou encore :

**Définition 3.3.3**

Les ensembles  $A$  et  $B$  représentés par les matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivement sont linéairement séparables si et seulement si :

$$\boxed{\min_{1 \leq i \leq m} A_i v > \max_{1 \leq i \leq k} B_i v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n} \quad (3.4)$$

ou de manière équivalente :

$$\boxed{A\omega \geq e\gamma + e \quad e\gamma - e \geq B\omega \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}} \quad (3.5)$$

**Théoreme 3.3.1**

$$(3.4) \iff (3.5)$$

**preuve 3**

$$(3.5) \implies (3.4) :$$

$$A\omega \geq e\gamma > e\gamma - e \geq B\omega \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\implies A\omega \geq B\omega \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n$$

en prenant  $\omega = v$  car on a pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ , on obtient :

$$\min_{1 \leq i \leq m} A_i v > \max_{1 \leq i \leq k} B_i v$$

$$(3.4) \implies (3.5) :$$

$$\text{En posant } \boxed{\nu = \min A_i v - \max B_i v > 0} ; \boxed{\omega = \frac{2v}{\nu}} ; \boxed{\gamma = \min \frac{A_i v}{\nu} + \max \frac{B_i v}{\nu}}$$



$\omega$  et  $\gamma$  conviennent car :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \min_i \frac{A_i v}{\nu} + \max_i \frac{B_i v}{\nu} \\
&= \frac{1}{\nu} [\min_i A_i v + \max_i B_i v] \\
&= \frac{1}{\nu} [\nu + 2 \max_i B_i v] \\
&= 1 + \max_i \frac{2B_i v}{\nu} \\
&= 1 + \max_i B_i \omega
\end{aligned}$$

D'où  $\gamma - 1 \geq B_i \omega$ .

L'autre inégalité se démontre de la même manière, à savoir :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \min_i \frac{A_i v}{\nu} + \max_i \frac{B_i v}{\nu} \\
&= \frac{1}{\nu} [\min_i A_i v + \max_i B_i v] \\
&= \frac{1}{\nu} [2 \min_i A_i v - \nu] \\
&= \min_i \frac{2A_i v}{\nu} - 1 \\
&= \min_i A_i \omega - 1
\end{aligned}$$

D'où  $\gamma + 1 \leq A_i \omega$ .

□

Quand  $A$  et  $B$  sont linéairement séparables, comme définis par (3.5), l'hyperplan d'équation  $\{x | \omega^T x = \gamma\}$  est l'hyperplan de séparation strict avec  $A\omega > e\gamma$  et  $e\gamma > B\omega$ .

Il existe une infinité d'hyperplans qui sépare les ensembles  $A$  et  $B$  (voir figure (3.1)). Comme dans le chapitre précédent, le problème est de trouver parmi tous les hyperplans possibles lequel est le meilleur. Sur la figure (3.1), l'hyperplan en traits continus est mieux car il est le plus éloigné de chacune des deux classes et de petites perturbations sur plusieurs points n'introduisent

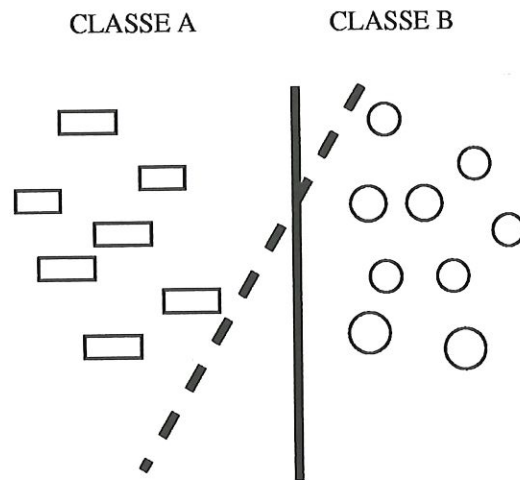


FIG. 3.1 – Lequel de ces 2 hyperplans est le meilleur ?

pas d'erreur de classification. Ce qui n'est pas le cas pour l'hyperplan en traits discontinus.

Une autre manière de voir si deux ensembles sont linéairement séparables est d'utiliser ce lemme :

**lemme 3.3.1**

Les ensembles  $A$  et  $B$  représentés par  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$  respectivement sont linéairement séparables si et seulement si la valeur minimale de (3.1) est zéro, dans quel cas  $(\omega = 0, \gamma)$  ne peut être optimal.

**preuve 4**

1. Le minimum de (3.1) est zéro si et seulement si  $-A\omega + e\gamma + e \leq 0$  et  $B\omega - e\gamma + e \leq 0$  si et seulement si (3.5).
2. Pour montrer que  $\omega = 0, \gamma$  ne peut être optimal pour (3.1), il suffit de mettre  $\omega = 0, \gamma$  quelconque et de montrer qu'on a une absurdité.  
 $\min_{\gamma} (1 + \gamma)_+ + (1 - \gamma)_+ = 2 > 0$ . Ce qui donne bien une absurdité.

□

Le sens de ce lemme est que le problème d'optimisation (3.1) qui est équivalent au programme linéaire (3.37) générera toujours un plan de séparation d'équation  $\omega^T x = \gamma$  pour des ensembles linéairement séparables  $A$  et  $B$ .

### 3.3.1 Première idée de construction.

Construire l'hyperplan qui maximise la distance minimale entre celui-ci et chacun des deux ensembles  $A$  et  $B$ . Pour cela, nous allons construire les plus petits ensembles convexes qui contiennent toutes les données de chacun des deux ensembles. Ceci donne lieu à une définition :

#### Définition 3.3.4

*L'enveloppe convexe est le plus petit ensemble convexe contenant les points.*

ou encore :

#### Définition 3.3.5

*L'enveloppe convexe consiste en tous les points qui peuvent être écrits comme une combinaison convexe des points de l'ensemble d'origine.*

Une fois cette enveloppe convexe trouvée, il faudra trouver les points de fermeture des ensembles afin de construire un segment joignant ces deux points. L'hyperplan de séparation sera celui qui sera à la fois orthogonal au segment et séparant ce même segment (voir figure (3.2)).

#### Définition 3.3.6

*Une combinaison convexe de points est une combinaison de poids positifs où la somme de ces poids est égale à 1.*

s.p.d.g :

- Une combinaison convexe des points de  $A$  peut s'écrire comme :  

$$c^T = u_1 A_1 + \dots + u_m A_m = u^T A \text{ où } u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0, \sum_{i=1}^m u_i = e^T u = 1.$$
- Une combinaison convexe des points de  $B$  peut s'écrire comme :  

$$d^T = v_1 B_1 + \dots + v_m B_m = v^T B \text{ où } v \in \mathbb{R}^k, v \geq 0, \sum_{i=1}^k v_i = e^T v = 1.$$

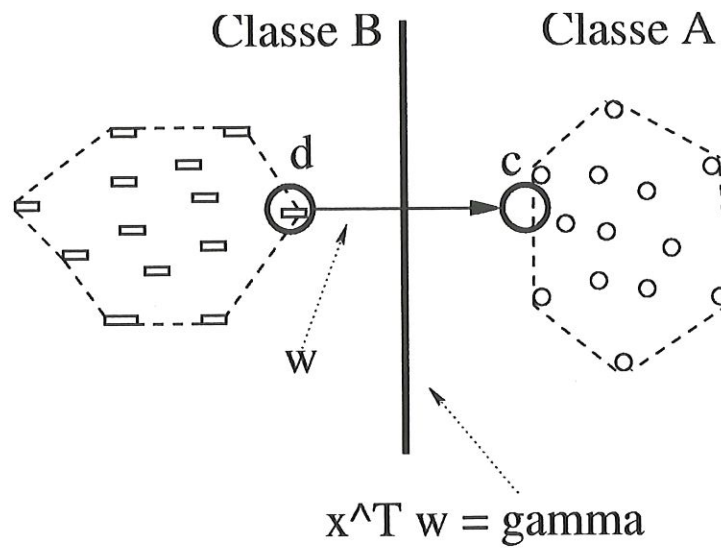


FIG. 3.2 – Les deux points de fermeture des enveloppes convexes déterminent l'hyperplan de séparation.

**Théoreme 3.3.2 (Caractérisation d'un séparateur linéaire.)**

Soient  $A$  et  $B$ , deux ensembles non vides de points dans  $\mathbb{R}^n$  comprenant  $m$  et  $k$  points respectivement.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

a)  $A$  et  $B$  sont linéairement séparables

i-e  $\exists \omega \in \mathbb{R}^n$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} A\omega - e\gamma &> 0 \\ -B\omega + e\gamma &> 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

b) Les enveloppes convexes de  $A$  et  $B$  ne s'intersectent pas.

i-e  $\nexists u \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}^k$  tel que

$$\begin{aligned} A^T u &= B^T v \\ e^T u &= e^T v = 1 \\ u &\geq 0 \\ v &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

### preuve 5

Par le théorème de l'alternative de Gordan :

- $\forall$  matrice  $C$  donnée, on a soit
1.  $Cx > 0$  a une solution  $x$
  - ou
  2.  $C^T y = 0$  et  $y \geq 0$  a une solution  $y$
- mais jamais les deux à la fois.

En choisissant

$$C = \begin{pmatrix} A & -e \\ -B & e \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \omega \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où  $u$  et  $v$  appartiennent à l'enveloppe convexe, on a la preuve. En effet :

$$Cx > 0 \iff \begin{pmatrix} A & -B \\ -e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \gamma \end{pmatrix} > 0 \iff A\omega - e\gamma > 0 \text{ et } -B\omega + e\gamma > 0$$

ou

$$C^T y = 0 \text{ avec } y \geq 0 \iff \begin{pmatrix} A & -B \\ -e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \text{ avec } (u, v) \geq 0$$

$$\iff Au - Bv = 0 \text{ et } -eu + ev = 0 \text{ avec } (u, v) \geq 0 \iff Au = Bv; eu = ev = 1; u \geq 0 \text{ et } v \geq 0$$

□

### 3.3.2 Deuxième idée de construction.

Le problème étant réduit à trouver les deux points de fermeture des enveloppes convexes de  $A$  et  $B$ , il peut se réécrire comme un problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{u,v} & \frac{1}{2} \|A^T u - B^T v\|^2 \\ sc & e^T u = 1 \\ & e^T v = 1 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Le perceptron  $(\omega, \gamma)$  est construit à partir des résultats du problème (3.8). Le vecteur normal  $\omega$  est exactement le vecteur situé entre les deux points de fermeture dans les enveloppes convexes.

Soient  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  les solutions optimales de (3.8). Les deux points de fermeture,  $c$  et  $d$ , sont  $c = A^T \bar{u}$  et  $d = B^T \bar{v}$ . Les poids du perceptron sont égaux à la différence de ces deux points :  $\omega = c - d = A^T \bar{u} - B^T \bar{v}$ . Le seuil,  $\gamma$ , est la distance de l'origine au point à mi-chemin entre les deux points de fermeture le long de la normale  $\omega$  :

$$\gamma = \left( \frac{c + d}{2} \right)^T \omega = \frac{(\bar{u}^T A \omega + \bar{v}^T B \omega)}{2}$$

En utilisant la dualité, nous pouvons transformer ce problème en un problème d'optimisation dans l'espace du perceptron. Pour cela, considérons le théorème suivant :

**Théoreme 3.3.3 (Dual d'un problème de séparation.)**

*Soient  $A$  et  $B$ , deux ensembles non vides de points dans  $\mathbb{R}^n$  comprenant  $m$  et  $k$  points respectivement.*

*Le problème primal :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \alpha, \beta} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - (\alpha - \beta) \\ sc & A\omega - \alpha e \geq 0 \\ & -B\omega + \alpha e \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

*a le dual suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{u, v} & \frac{1}{2} \|A^T u - B^T v\|^2 \\ sc & e^T u = 1 \\ & e^T v = 1 \\ & u \geq 0 \text{ et } v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$



**preuve 6**

Le dual maximise le lagrangien de (3.9),  $\mathcal{L}(\omega, \alpha, \beta, u, v)$ , sujet aux contraintes telles que les dérivées partielles du lagrangien des variables primales respectives sont égales à 0.

Le dual de (3.9) est :

$$\begin{aligned} \max_{\omega, \alpha, \beta, u, v} \mathcal{L}(\omega, \alpha, \beta, u, v) &= \frac{1}{2} \underbrace{\|\omega\|^2 - (\alpha - \beta)}_{f(x)} - u^T \underbrace{(A\omega - e\alpha)}_{g_1(x)} - v^T \underbrace{(-B\omega + e\beta)}_{g_2(x)} \\ \text{sc} \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega} &= 0; \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = 0; \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} = 0; \quad u \geq 0 \text{ et } v \geq 0 \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega} = \frac{1}{2} 2\omega - u^T A + v^T B = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha} = -1 + e^T u = 0$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} = 1 - e^T v = 0$$

Le dual de (3.9) peut donc se réécrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\omega, \alpha, \beta, u, v} & \mathcal{L}(\omega, \alpha, \beta, u, v) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - (\alpha - \beta) - u^T(A\omega - e\alpha) - v^T(-B\omega + e\beta) \\ \text{sc} & \omega - A^T u + B^T v = 0 \\ & -1 + e^T u = 0 \\ & 1 - e^T v = 0 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $\omega \in \mathbb{R}^n$ ;  $u \in \mathbb{R}^k$ ;  $v \in \mathbb{R}^m$ .

Pour simplifier le problème, on substitue  $\omega$  par  $A^T u - B^T v$ .

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\omega, \alpha, \beta, u, v} \quad \frac{1}{2} \|A^T u - B^T v\|^2 - (\alpha - \beta) \\ \quad - u^T (A(A^T u - B^T v) - e\alpha) - v^T (-B(A^T u - B^T v) + e\beta) \\ sc \quad \quad \quad A^T u - B^T v - A^T u + B^T v = 0 \\ \quad \quad \quad -1 + e^T u = 0 \\ \quad \quad \quad 1 - e^T v = 0 \\ \quad \quad \quad u \geq 0 \\ \quad \quad \quad v \geq 0 \end{array} \right.$$

Ce qui est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\omega, \alpha, \beta, u, v} \quad \frac{1}{2} \|A^T u - B^T v\|^2 - (\alpha - \beta) \\ \quad - u^T A(A^T u - B^T v) + e^T u \alpha + v^T B(A^T u - B^T v) - e^T v \beta \\ sc \quad \quad \quad e^T u = e^T v = 1 \\ \quad \quad \quad u, v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Or

$$\|A^T u - B^T v\|^2 = (u^T A - v^T B)(A^T u - B^T v)$$

En remplaçant dans le problème précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (u^T A - v^T B)(A^T u - B^T v) - (\alpha - \beta) - u^T A(A^T u - B^T v) + \underbrace{e^T u \alpha}_1 + v^T B(A^T u - B^T v) \\ & \quad - \underbrace{e^T v \beta}_1 \\ & = \frac{1}{2} (u^T A - v^T B)(A^T u - B^T v) - (\alpha - \beta) - u^T A A^T u + u^T A B^T v + \alpha \\ & \quad + v^T B A^T u - v^T B B^T v - \beta \\ & = (A^T u - B^T v) \left[ \frac{1}{2} (u^T A v^T B) - u^T A + v^T B \right] \\ & = (A^T u - B^T v) \left[ \frac{1}{2} u^T A - \frac{1}{2} v^T B - u^T A + v^T B \right] \\ & = (A^T u - B^T v) \left[ -\frac{1}{2} u^T A + \frac{1}{2} v^T B \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A^T u - B^T v) - \frac{1}{2} [u^T A - v^T B] \\
&= -\frac{1}{2} (A^T u - B^T v) (u^T A - v^T B) \\
&= -\frac{1}{2} \|A^T u - B^T v\|^2
\end{aligned}$$

Par la règle suivante d'optimisation, à savoir  $\max (-) = \min (+)$ , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{u,v} & \frac{1}{2} \|A^T u - B^T v\|^2 \\ sc & e^T u = 1 \\ & e^T v = 1 \\ & u \geq 0 \text{ et } v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

□

Le dual du problème (3.8) peut donc être écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \alpha, \beta} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - (\alpha - \beta) \\ sc & A\omega - \alpha e \geq 0 \\ & -B\omega + \beta e \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Considérons l'ensemble des plans d'appui parallèles comme le montre la figure (3.3). Ces plans d'appui sont placés de sorte que tous les points de  $A$  soient tels que :

1.  $x^T \omega \leq \alpha$ .
2. Il existe au moins un point de  $A$  tel que  $x^T \omega = \alpha$ .

Et tous les points de  $B$  soient tels que :

1.  $x^T \omega \geq \beta$ .
2. Il existe au moins un point de  $B$  tel que  $x^T \omega = \beta$ .

L'hyperplan de séparation optimal est trouvé en maximisant la distance entre les deux plans d'appui parallèles. Cette distance équivaut à  $\frac{\alpha - \beta}{\|\omega\|}$ . Pour minimiser cette distance, il suffit de minimiser  $\|\omega\|$  et de maximiser  $(\alpha - \beta)$ . Ceci revient au même que de traiter le problème d'optimisation dual

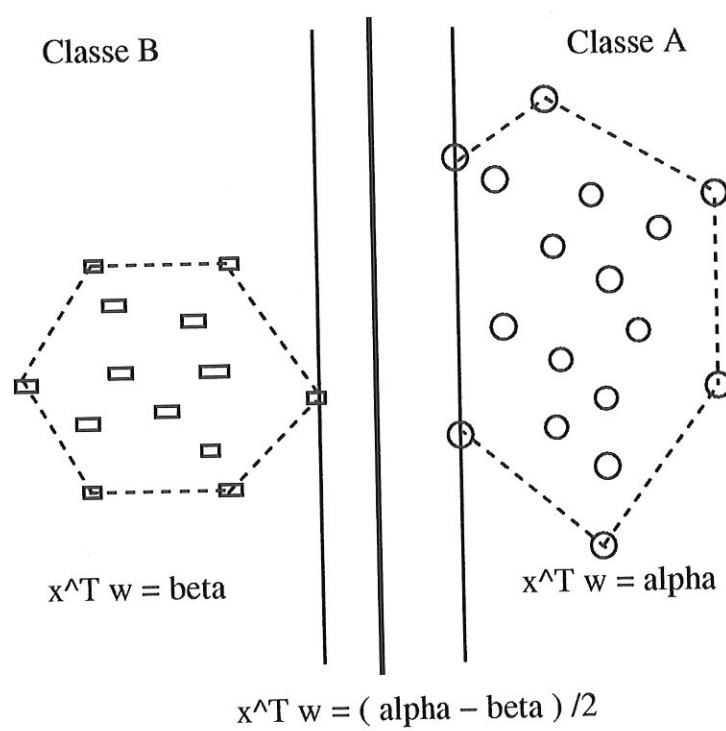


FIG. 3.3 – Le problème dual maximise la distance entre les deux plans d'appui parallèles.

(3.14). Soient  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  les solutions optimales du problème (3.14) Pour le cas linéairement séparable,  $\hat{\alpha} - \hat{\beta} > 0$ . L'hyperplan de séparation final est le plan à mi-chemin entre les deux plans d'appui parallèles :

$$\boxed{x^T \hat{\omega} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{2}}$$

**Remarques :**

Les problèmes (3.8) et (3.14) sont quadratiques avec des contraintes linéaires. Il peuvent donc être résolus à l'aide de la programmation mathématique standard. Le choix de résoudre l'un ou l'autre dépend du contexte. Le problème(3.8) contient des contraintes très simples à traiter et le nombre de variables dépend uniquement du nombre total de points. D'où, lorsque le nombre de données est très grand, on traitera le problème(3.8). Le problème (3.14) fournit une structure uniforme pour expliquer d'autres approches prioritaires d'optimisation afin de construire le perceptron. En transformant le problème (3.14) en un problème équivalent d'optimisation, différents algorithmes en résultent.

Le problème (3.14) peut être transformé à l'aide du théorème suivant :

**Théoreme 3.3.4 (Equivalence entre 2 problèmes de séparation.)**  
*Pour les ensembles séparables, le problème (3.9) et le problème suivant sont équivalents :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \gamma} & \frac{1}{2} \|\gamma\|^2 \\ sc & A\omega - (\gamma + 1)e \geq 0 \\ & -B\omega + (\gamma - 1)e \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

**preuve 7**

Le problème (3.9) était :

$$\begin{cases} \min_{\omega, \alpha, \beta} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - (\alpha - \beta) \\ \text{sc} & A\omega - \alpha e \geq 0 \\ & -B\omega + \alpha e \geq 0 \end{cases}$$

Les deux problèmes étant des problèmes de minimisation convexes avec des contraintes linéaires, tout ce que nous devons montrer est que :  
si les conditions d'optimalité d'un problème sont satisfaites,  
alors les conditions d'optimalité de l'autre sont satisfaites.

Premièrement, nous allons montrer que n'importe quelle solution de (3.15) peut être utilisée pour construire une solution de (3.9)

Soit  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{\gamma}$ , une solution optimale de (3.15), les conditions de KKT s'écrivent :

$$\begin{aligned} A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e &\geq 0 \\ -B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e &\geq 0 \\ \bar{u}^T(A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e) &= 0 \\ \bar{v}^T(-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e) &= 0 \\ \bar{\omega} &= A^T\bar{u} - B^T\bar{v} \\ e^T\bar{u} &= e^T\bar{v} \\ \bar{u} &\geq 0 \\ \bar{v} &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Soit  $\boxed{\delta = e^T\bar{u} = e^T\bar{v}}$

Définissons :  $\boxed{\hat{u} = \frac{\bar{u}}{\delta}}$ ,  $\boxed{\hat{v} = \frac{\bar{v}}{\delta}}$ ,  $\boxed{\hat{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{\delta}}$ ,  $\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\bar{\gamma} + 1}{\delta}}$ ,  $\boxed{\hat{\beta} = \frac{\bar{\gamma} - 1}{\delta}}$

où  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  appartiennent à l'enveloppe convexe.

Alors  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$  satisfont à :



$$\begin{aligned}
\hat{\omega} &= A^T \hat{u} - B^T \hat{v} \\
A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e &= \frac{1}{\delta} (A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e) \geq 0 \\
-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e &= \frac{1}{\delta} (-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e) \geq 0 \\
\hat{u}^T (A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e) &= \frac{\bar{u}^T}{\delta^2} (A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e) = 0 \\
\hat{v}^T (-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e) &= \frac{\bar{v}^T}{\delta^2} (-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e) = 0 \\
e^T \hat{u} &= e^T \hat{v} = 1 \\
\hat{u} &\geq 0 \\
\hat{v} &\geq 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

En effet de (3.16), nous avons :

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} = A^T \bar{u} - B^T \bar{v} &\hookrightarrow \delta\hat{\omega} = A^T \delta\hat{u} - B^T \delta\hat{v} \\
&\hookrightarrow \delta\hat{\omega} = \delta(A^T \hat{u} - B^T \hat{v}) \\
&\hookrightarrow \hat{\omega} = (A^T \hat{u} - B^T \hat{v})
\end{aligned}$$

Ce qui donne la première égalité.

$$\begin{aligned}
\bar{u} \geq 0 &\hookrightarrow \delta\hat{u} \geq 0 \\
&\implies \hat{u} \geq 0
\end{aligned}$$

En effectuant de la même façon pour  $\hat{v}$ , on obtient les septième et huitième inégalités.

$$e^T \bar{u} = e^T \bar{v} \hookrightarrow e^T \delta\hat{u} = e^T \delta\hat{v} = 1$$

Ce qui nous donne la sixième égalité.

$$\begin{aligned}
A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e \geq 0 &\hookrightarrow A(\delta\hat{\omega}) - (\delta\hat{\alpha})e \geq 0 \\
&= \delta A\hat{\omega} - \delta\hat{\alpha}e \geq 0 \\
&= A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e \geq 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la deuxième inégalité.

$$\begin{aligned}
-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e \geq 0 &\hookrightarrow -B(\delta\hat{\omega}) + (\delta\hat{\beta})e \geq 0 \\
&= -B\hat{\omega} + \hat{\beta}e \geq 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la troisième inégalité.

$$\begin{aligned}
\bar{u}^T (A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e) = 0 &\hookrightarrow (\delta\hat{u})^T (A\delta\hat{\omega} - \delta\hat{\alpha}e) = 0 \\
&= (\delta\hat{u})^T (\delta(A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e)) = 0 \\
&= \delta(\hat{u}^T (A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e)) = 0 \\
&= \hat{u}^T (A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e) = 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la quatrième égalité.

$$\begin{aligned}\bar{v}^T(-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e) = 0 &\hookrightarrow (\delta\hat{v})^T(-B\delta\hat{\omega} + \delta\hat{\beta}e) = 0 \\ &= \delta(\hat{v}^T(-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e)) = 0 \\ &= \hat{v}^T(-B\hat{\omega} + \hat{\alpha}e) = 0\end{aligned}$$

Ce qui donne la cinquième égalité. Ceci nous donne les conditions d'optimalité du problème (3.9).

Maintenant, nous allons montrer que n'importe quelle solution de (3.9) peut être utilisée pour construire une solution de (3.15).

Soient  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$  qui satisfont les conditions d'optimalité (3.17) de (3.9).

remarque : pour le cas séparable,  $\hat{\alpha} - \hat{\beta} \geq 0$ .

Définissons  $\boxed{\bar{u} = \frac{2\hat{u}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}}$  ;  $\boxed{\bar{v} = \frac{2\hat{v}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}}$  ;  $\boxed{\bar{\omega} = \frac{2\hat{\omega}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}}$  et  $\boxed{\bar{\gamma} = \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}}$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= A^T \bar{u} - B^T \bar{v} \\ A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e &= \frac{1}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} (2A\hat{\omega} - ((\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + (\hat{\alpha} - \hat{\beta}))e) \\ &= \frac{2}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} (A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e) \geq 0 \\ -B\bar{\omega} - (\bar{\gamma} - 1)e &= \frac{1}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} (-2B\hat{\omega} + ((\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - (\hat{\alpha} - \hat{\beta}))e) \\ &= \frac{2}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} (-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e) \geq 0 \\ \bar{u}^T(A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e) &= \frac{4\hat{u}^T}{(\hat{\alpha} - \hat{\beta})^2} (A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e) = 0 \\ \bar{v}^T(-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e) &= \frac{4\hat{v}^T}{(\hat{\alpha} - \hat{\beta})^2} (-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e) = 0 \\ e^T \bar{u} &= e^T \bar{v} = 0 \\ \bar{u} &\geq 0 \\ \bar{v} &\geq 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\hat{\omega} = A^T \hat{u} - B^T \hat{v} &\hookrightarrow \frac{1}{2} \bar{\omega}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = A^T \frac{1}{2} \bar{u}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) - B^T \frac{1}{2} \bar{v}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) \\ &\hookrightarrow \bar{\omega} = (A^T \bar{u} - B^T \bar{v})\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la première égalité.

$$\begin{aligned}
A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e \geq 0 &\implies \frac{2}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} (A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e) \geq 0 \\
&\hookrightarrow \frac{1}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} (2A\hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\alpha} - \hat{\beta})e) \geq 0 \\
&\hookrightarrow A \underbrace{\left( \frac{2\hat{\omega}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\omega}} - \underbrace{\left( \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} + \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\gamma}+1} e \geq 0 \\
&\hookrightarrow A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e \geq 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la deuxième inégalité.

$$\begin{aligned}
-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e \geq 0 &\implies \frac{2}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} (-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e) \geq 0 \\
&\hookrightarrow \frac{1}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} (-2B\hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta} - \hat{\alpha} + \hat{\beta})e) \geq 0 \\
&\hookrightarrow -B \underbrace{\left( \frac{2\hat{\omega}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\omega}} - \underbrace{\left( \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} - \frac{\hat{\alpha} - \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\gamma}-1} e \geq 0 \\
&\hookrightarrow -B\bar{\omega} - (\bar{\gamma} - 1)e \geq 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la troisième inégalité.

$$\begin{aligned}
\hat{u}^T(A\hat{\omega} - \hat{\alpha}e) = 0 &\implies \left( \frac{2\hat{u}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right)^T \left( \frac{2A\hat{\omega}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} - \frac{2\hat{\alpha}e}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right) = 0 \\
&\implies \left( \frac{2\hat{u}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right)^T \left[ \frac{2A\hat{\omega}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} - \left( \frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} + \frac{\hat{\alpha}-\hat{\beta}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right) e \right] = 0 \\
&\implies \underbrace{\left( \frac{2\hat{u}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{u}}^T \left[ A \underbrace{\left( \frac{2\hat{\omega}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\omega}} - \left( \underbrace{\left( \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\gamma}} + 1 \right) e \right] = 0 \\
&\hookrightarrow \bar{u}^T(A\bar{\omega} - (\bar{\gamma} + 1)e) = 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la quatrième égalité.

$$\begin{aligned}
\hat{v}^T(-B\hat{\omega} + \hat{\beta}e) = 0 &\implies \left( \frac{2\hat{v}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right)^T \left( \frac{-2B\hat{\omega}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} + \frac{2\hat{\beta}e}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right) = 0 \\
&\implies \left( \frac{2\hat{v}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right)^T \left[ \frac{-2B\hat{\omega}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} + \left( \frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} - \frac{\hat{\alpha}-\hat{\beta}}{\hat{\alpha}-\hat{\beta}} \right) e \right] = 0 \\
&\implies \underbrace{\left( \frac{2\hat{v}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{v}}^T \left[ -B \underbrace{\left( \frac{2\hat{\omega}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\omega}} + \left( \underbrace{\left( \frac{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{\gamma}} - 1 \right) e \right] = 0 \\
&\hookrightarrow \bar{v}^T(-B\bar{\omega} + (\bar{\gamma} - 1)e) = 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne la cinquième égalité.

$$\begin{aligned}
e^T \hat{u} = e^T \hat{v} &\implies \frac{2}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} e^T \hat{u} = \frac{2}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} e^T \hat{v} \\
&\implies e^T \underbrace{\left( \frac{2\hat{u}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{u}} = e^T \underbrace{\left( \frac{2\hat{v}}{\hat{\alpha} - \hat{\beta}} \right)}_{\bar{v}} \\
&\hookrightarrow e^T \bar{u} = e^T \bar{v} = 1 \text{ car dans l'enveloppe convexe}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la sixième égalité.

Pour les septième et huitième inégalités, la preuve est évidente.

□

Par ce théorème, nous obtenons donc l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \gamma} & \frac{1}{2} \|\omega\|^2 \\ sc & A\omega - (\gamma + 1)e \geq 0 \\ & -B\omega + (\gamma - 1)e \geq 0 \end{array} \right.$$

### 3.4 Cas linéairement inséparable.

**Idée centrale.**

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les ensembles  $A$  et  $B$  de données étaient linéairement séparables. Mais souvent, les ensembles  $A$  et  $B$  ne peuvent être séparés par aucun hyperplan. Pour le cas linéairement inséparable, le problème de séparation devient plus difficile à traiter car les enveloppes convexes des deux ensembles s'intersectent. Dans ce cas, il n'y a pas de définition exacte de ce que constitue le meilleur hyperplan de séparation.

L'approche générale est de développer quelques mesures sur l'erreur de classification et ensuite de minimiser cette erreur. Une façon de résoudre ce problème est de considérer les enveloppes convexes réduites.

#### Définition 3.4.1

L'enveloppe convexe réduite est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de la forme :

- $c = A^T u$  des points de l'ensemble  $A$  où  $e^T u = 1; 0 \leq u \leq De; D < 1$ .
- $d = B^T v$  des points de l'ensemble  $B$  où  $e^T v = 1; 0 \leq v \leq De; D < 1$ .

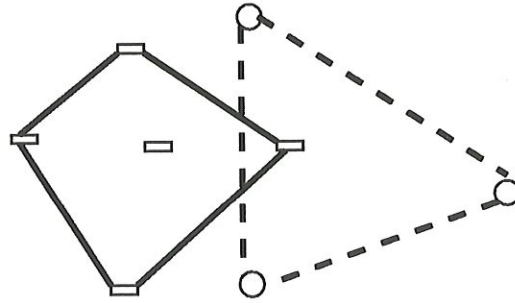


FIG. 3.4 – Pour des ensembles linéairement séparables, les enveloppes convexes s'intersectent.

**remarque :** On choisit  $D = \frac{1}{K}$  où  $K > 1$ . Les enveloppes convexes réduites ainsi définies sont non vides tant que  $K \leq m, k$  où  $m$  et  $k$  sont le nombre de points contenus dans les ensembles  $A$  et  $B$  respectivement. Cela revient à diminuer l'ensemble réalisable tel que les points extrêmes ou "dérangeants" n'influencent pas fortement la solution.

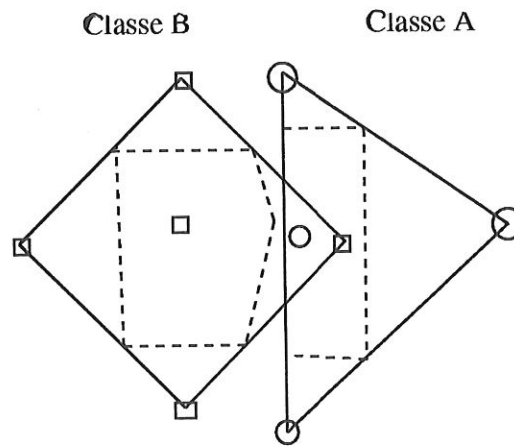


FIG. 3.5 – Enveloppes convexes et enveloppes convexes réduites pour  $K=2$ .

Nous allons généraliser, pour commencer, le problème (3.9) au cas linai-



rement inséparable. Le problème (3.9) après transformation était :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max_{\omega, \alpha, \beta} & \alpha - \beta \\ sc & A\omega - \alpha e \geq 0 \\ & -B\omega + \beta e \geq 0 \\ & \|\omega\|^2 = 1 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Théoriquement, tous les points de l'ensemble  $A$  sont du côté le plus grand du plan d'équation  $x^T \omega = \alpha$  et tous les points de l'ensemble  $B$  sont du côté le plus petit du plan d'équation  $x^T \omega = \beta$ . Comme les enveloppes convexes des ensembles  $A$  et  $B$  s'intersectent, nous savons que seul  $\alpha$  et  $\beta$  qui satisfont à  $\alpha - \beta \geq 0$  sont réalisables. D'où, en maximisant  $\alpha - \beta$ , les deux plans sont placés aussi proche que possible.

A l'optimum, le point qui a l'erreur de classification la plus grande est à une distance exacte de  $\frac{|\alpha - \beta|}{2}$  de l'hyperplan de séparation. D'où, le problème (3.19) aussi appelé MSM minimise la distance maximale de tous les points mal classés à l'hyperplan de séparation. Cette méthode possède toutefois un problème majeur : en additionnant ou en soustrayant un point mal classé ou un point difficile à classer, on peut changer dramatiquement la solution du problème de séparation.

Une des alternatives utilisées est de minimiser la somme des erreurs de classification.

#### Définition 3.4.2

*L'erreur de classification est définie comme la distance d'un point mal classé au plan de support approprié.*

#### Définition 3.4.3

- Un point  $A_i$  est mal classé si :  $-A_i \omega + \alpha \geq 0; i = 1, \dots, m$ .
- Un point  $B_j$  est mal classé si :  $B_j \omega - \beta \geq 0; j = 1, \dots, k$ .

#### Définition 3.4.4

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_i &= -A_i \omega + \alpha \quad \text{si } A_i \text{ est mal classé.} \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_j &= B_j \omega - \beta \quad \text{si } B_j \text{ est mal classé.} \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$



Nous pouvons construire un programme linéaire pour minimiser la somme des  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  et la somme des  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  où  $m$  et  $k$  sont le nombre de points de  $A$  et  $B$  respectivement. Considérons l'approche du programme linéaire de Bennett et Mangasarian suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \alpha, \beta, y, z} & \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \\ sc & A\omega - \alpha e + y \geq 0 \\ & -B\omega + \beta e + z \geq 0 \\ & \alpha - \beta = 2 \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

où :

- $y :=$  variable d'écart qui relâche les contraintes de sorte que tous les points de l'ensemble  $A$  soient du côté le plus grand du plan d'équation  $x^T \omega = \alpha$ .
- $z :=$  variable d'écart qui relâche les contraintes de sorte que tous les points de l'ensemble  $B$  soient du côté le plus petit du plan d'équation  $x^T \omega = \beta$ .
- les coefficients  $\frac{1}{m}$  et  $\frac{1}{k}$  sont choisis de sorte qu'il existe toujours une solution optimale significative  $\omega \neq 0$ .

**remarque :**

- Si  $\omega = 0$  alors le perceptron place tous les points en une classe et la solution ne vaut rien.
- MSM travaille bien pour le cas séparable mais avec de mauvaises données, la méthode a des performances assez pauvres lorsqu'il doit minimiser l'erreur maximum[5].
- Le problème (3.20) aussi appelé RLP n'est pas bien défini dans le cas séparable, tandis que pour le cas inséparable, tout hyperplan de séparation mis à l'échelle appropriée est optimal pour  $e^T y = e^T z = 0$  [5].

Les prochaines approches préservent les avantages de RLP et MSM.

### Première approche.

Une première approche est de minimiser  $\|\omega\|_2$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, y, z, \alpha, \beta} & (1 - \lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{\lambda}{2} \omega^T \omega \\ sc & A\omega - \alpha e + y \geq 0 \\ & -B\omega + \beta e + z \geq 0 \\ & \alpha - \beta = 2 \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

où :

- Ce problème est aussi appelé Gop.
- $0 < \lambda < 1$  = constante fixée.
- $(1 - \lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{\lambda}{2} \omega^T \omega$  réduit la distance moyenne entre les points mal classés et le plan de support relaxé.
- $\frac{\lambda}{2} \omega^T \omega$  diminue l'erreur de classification maximale.

### Remarque :

1. Quand  $\lambda$  est proche de 0, l'objectif de RLP est atteint.
2. En utilisant les théorèmes sur les perturbations non linéaires de programme linéaire dans [5], il existe  $\bar{\lambda} \geq 0$  tel que si  $\lambda \in ]0, \bar{\lambda}]$ , il existe une solution de (3.22) qui résout aussi (3.20). Cela signifie que pour  $\lambda$  suffisamment petit, (3.22) choisira une des solutions de (3.20) qui minimise la distance entre les plans de support.

## Deuxième approche.

Une deuxième approche est de considérer le dual de (3.22).

### **Théoreme 3.4.1 (Dual d'un plan optimal généralisé)**

Le dual du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, y, z, \alpha, \beta} & (1 - \lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{\lambda}{2} \omega^T \omega \\ sc & A\omega - \alpha e + y \geq 0 \\ & -B\omega + \beta e + z \geq 0 \\ & \alpha - \beta = 2 \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{u, v, \delta} & \frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 - 2\delta \\ sc & e^T u = e^T v = \delta \\ & \frac{1-\lambda}{m} e \geq u \geq 0 \\ & \frac{1-\lambda}{k} e \geq v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.23)$$

**preuve 8**

En utilisant les multiplicateurs  $u, v, s, t$  et  $\delta$ , le dual s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\omega, y, z, \alpha, \beta, u, v, s, t, \delta} \quad \underbrace{(1 - \lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{\lambda}{2} \omega^T \omega}_{f(x)} - \\ \quad \underbrace{u^T (A\omega - \alpha e + y) - v^T (-B\omega + \beta e + z)}_{\text{car } A\omega - \alpha e + y \geq 0} - \\ \quad \delta(\alpha - \beta - 2) - s^T y - t^T z \\ \quad \lambda \omega - A^T u + B^T v = 0 \\ \quad e^T u = e^T v = \delta \\ \quad \frac{1-\lambda}{m} e - u = s \geq 0 \\ \quad \frac{1-\lambda}{k} e - v = t \geq 0 \\ \quad u \geq 0 \\ \quad v \geq 0 \end{array} \right. \quad sc \quad (3.24)$$

Posons  $\omega = \frac{A^T u - B^T v}{\lambda}$

$\omega$  ayant été substitué, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{y,z,\alpha,\beta,u,v,\delta} \quad (1-\lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{u^T A - v^T B}{\lambda} \right) \left( \frac{A^T u - B^T v}{\lambda} \right) \\ \\ -u^T \left( A \left( \frac{A^T u - B^T v}{\lambda} \right) - \alpha e + y \right) \\ \\ -v^T \left( -B \left( \frac{A^T u - B^T v}{\lambda} \right) + \beta e + z \right) \\ \\ -\delta(\alpha - \beta - 2) - s^T y - t^T z \\ \\ \lambda \left( \frac{A^T u - B^T v}{\lambda} \right) - A^T u + B^T v = 0 \\ \\ e^T u = e^T v = \delta \\ \\ \frac{1-\lambda}{m} e - u = s \geq 0 \\ \\ \frac{1-\lambda}{k} e - v = t \geq 0 \\ \\ u \geq 0 \\ \\ v \geq 0 \end{array} \right. \quad sc \quad (3.25)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{y,z,\alpha,\beta,u,v,\delta} \quad (1-\lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{1}{2\lambda} (u^T A - v^T B)(A^T u - B^T v) - \\ \quad \frac{1}{\lambda} u^T A(A^T u - B^T v) + \alpha e^T u - u^T y + \\ \quad \frac{1}{\lambda} v^T B(A^T u - B^T v) - \beta e^T v - v^T z - \\ \quad \delta(\alpha - \beta - 2) - s^T y - t^T z \\ \\ \quad e^T u = e^T v = \delta \\ \\ \quad \frac{1-\lambda}{m} e - u = s \geq 0 \\ \\ \quad \frac{1-\lambda}{k} e - v = t \geq 0 \\ \\ \quad u \geq 0 \\ \\ \quad v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Considérons à présent les deuxième et troisième contraintes.

$$\begin{aligned} s^T y &= \left( \frac{1-\lambda}{m} e - u \right)^T y \\ &= \frac{1-\lambda}{m} e^T y - u^T y \\ s^T t &= \left( \frac{1-\lambda}{k} e - v \right)^T z \\ &= \frac{1-\lambda}{k} e^T z - v^T z \end{aligned}$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{y,z,\alpha,\beta,u,v,\delta} \quad (1-\lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{1}{2\lambda} (u^T A - v^T B)(A^T u - B^T v) - \\ \quad \frac{1}{\lambda} u^T A(A^T u - B^T v) + \alpha e^T u - u^T y + \\ \quad \frac{1}{\lambda} v^T B(A^T u - B^T v) - \beta e^T v - z^T v - \\ \quad \delta(\alpha - \beta - 2) - \frac{1-\lambda}{m} e^T y + u^T y - \frac{1-\lambda}{k} e^T z + v^T z \\ \\ \quad e^T u = e^T v = \delta \\ \\ \quad \frac{1-\lambda}{m} e \geq u \geq 0 \\ \\ \quad \frac{1-\lambda}{k} e \geq v \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$



En utilisant le fait que  $(u^T A - v^T B)(A^T u - B^T v) = \|A^T u - B^T v\|^2$ , on obtient pour la fonction à maximiser :

$$\begin{aligned}
& \dots (1 - \lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 - \\
& \frac{1}{\lambda} u^T A A^T u + \frac{1}{\lambda} u^T A B^T v + \alpha e^T u - u^T y + \frac{1}{\lambda} v^T B A^T u - \\
& \frac{1}{\lambda} v^T B B^T v - \beta e^T v - z^T v - \delta \alpha + \delta \beta + 2\delta - \\
& \frac{1 - \lambda}{m} e^T y + u^T y - \frac{1 - \lambda}{k} e^T z \\
& = \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z - \frac{\lambda}{m} e^T y - \frac{\lambda}{k} e^T z \\
& \frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 - \frac{1}{\lambda} u^T A A^T u + \frac{1}{\lambda} u^T A B^T v + \alpha \delta - \\
& u^T y - \frac{1}{\lambda} v^T B A^T u - \frac{1}{\lambda} v^T B B^T v - \beta e^T v - z^T v - \delta \alpha + \delta \beta + \\
& 2\lambda - \frac{1 - \lambda}{m} e^T y + u^T y - \frac{1 - \lambda}{k} e^T z + v^T z \\
& \text{Or } \boxed{\|A^T u - B^T v\|^2 = (A^T u - B^T v)^T (A^T u - B^T v)} \\
& \Rightarrow u^T A A^T u - u^T A B^T v - v^T B A^T u + v^T B B^T v \\
& = \frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 - \frac{1}{\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 + 2\delta \\
& = -\frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 + 2\delta
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ce qui donne pour le dual :

$$\begin{cases} \max_{u,v,\delta} & -\frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 + 2\delta \\ sc & e^T u = e^T v = \delta \\ & \frac{1-\lambda}{m} e \geq u \geq 0 \\ & \frac{1-\lambda}{k} e \geq v \geq 0 \end{cases}$$

□

Le dual du programme (3.22) peut donc être écrit comme :

$$\begin{cases} \min_{u,v} & \frac{1}{2\lambda} \|A^T u - B^T v\|^2 - 2\delta \\ sc & e^T u = e^T v = \delta \\ & \frac{1-\lambda}{m} e \geq u \geq 0 \\ & \frac{1-\lambda}{k} e \geq v \geq 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Afin de mieux cerner le problème, considérons le cas où  $\delta = 1$ . Les points  $A^T u$  et  $B^T v$  étant dans les enveloppes convexes de  $A$  et  $B$  respectivement, l'objectif est de minimiser la distance entre ces points. Les vecteurs  $u$  et  $v$  seront contraints par :

$$e > \frac{1-\lambda}{m} \quad e \geq u \geq 0$$

$$e > \frac{1-\lambda}{k} \quad e \geq v \geq 0$$

Ce qui oblige les vecteurs  $u_i$  et  $v_j$  à être positifs. C'est-à-dire que plus de points dans  $A$  et  $B$  sont utilisés dans les enveloppes convexes. Ce qui entraîne une meilleure solution.

En d'autres mots, vu que les combinaisons convexes  $c$  et  $d$  contiennent beaucoup plus de points chacune, alors  $c$  et  $d$  se situent loin des bords de chacune des enveloppes convexes. Comme  $\lambda$  augmente, de plus en plus de points dans  $A$  et  $B$  doivent être utilisés. Si on augmente  $\delta$ , cela a un effet similaire. Une version du problème (3.22) est obtenue en :

- remplaçant la norme-2 de  $\omega$  par la norme-1 de  $\omega$ . La norme-1 de  $\omega$  étant égale à  $e^T |\omega|$  ;
- modifiant la valeur absolue de la fonction objectif en introduisant la variable  $s$  et les contraintes  $-s \leq \omega \leq s$  ;
- substituant  $e^T s$  par  $\frac{\omega^T \omega}{2}$  .

Le programme linéaire résultant est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \alpha, \beta, y, z} & (1-\lambda) \left( \frac{1}{m} e^T y + \frac{1}{k} e^T z \right) + \lambda e^T s \\ sc & A\omega - \alpha e + y \geq 0 \\ & -B\omega + \beta e + z \geq 0 \\ & \alpha - \beta = 2 \\ & -s \leq \omega \leq s \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \\ & s \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Ce programme minimise la distance moyenne entre les points mal classés et les plans de support relaxés et l'erreur maximale de classification. L'avantage de ce programme est qu'il est résoluble en un temps polynomial alors

que (3.22) est un programme quadratique. La figure (3.6) illustre le résultat obtenu par les différentes méthodes.

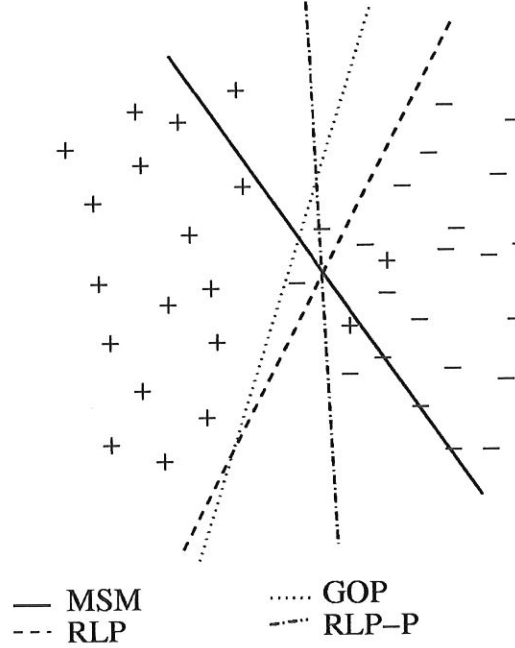


FIG. 3.6 – Résultats obtenus par les méthodes MSM, RLP, RLP-P et GOP.

### Troisième approche.

Le but est de minimiser la moyenne des violations des points de l'ensemble  $A$  qui sont du mauvais côté du plan d'équation  $\omega^T x = \gamma + 1$ , c'est-à-dire  $\{x | \omega^T x < \gamma + 1\}$  et des points de  $B$  qui sont du mauvais côté du plan d'équation  $\omega^T x = \gamma - 1$ , c'est-à-dire  $\{x | \omega^T x > \gamma - 1\}$ . Cette moyenne des violations est définie comme :

$$\frac{1}{m} \sum_i^m (-A_i \omega + \gamma + 1)_+ + \frac{1}{k} \sum_i^k (B_i \omega - \gamma + 1)_+ \quad (3.31)$$

Il faut remarquer que la position du plan d'équation  $\omega^T x = \gamma$  obtenue en minimisant la moyenne des violations (3.31) peut être optimisée en posant  $\omega$  fixé à la valeur optimale et en résolvant le problème d'optimisation à une dimension en  $\gamma$  suivant :

$$\min_{\min_i A_i \omega \leq \gamma \leq \max_j B_j \omega} \frac{1}{m} \sum_i^m (-A_i \omega + \gamma)_+ + \frac{1}{k} \sum_i^k (B_i \omega - \gamma)_+ \quad (3.32)$$

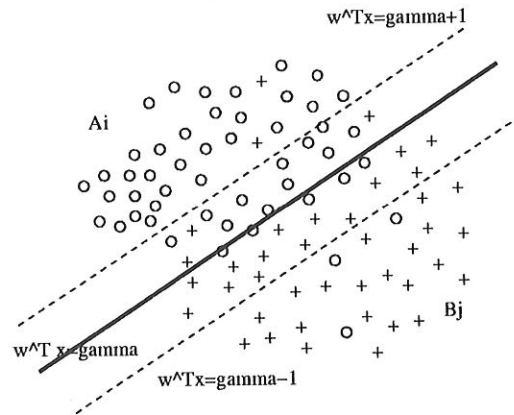


FIG. 3.7 – Un hyperplan de séparation optimal pour les ensembles linéairement séparables A(o) et B(+).

Cette approche n'est pas nécessaire en général mais pour quelques problèmes, cela donne la position du plan de séparation optimal pour une orientation fixée des plans. La fonction objectif du problème (3.32) est une fonction linéaire convexe par morceaux qui peut être facilement minimisée en évaluant la fonction aux points extrêmes :  $\gamma = A_1\omega, \dots, A_m\omega, B_1\omega, \dots, B_k\omega$ . Un premier résultat est le suivant :

**lemme 3.4.1**

Soient

- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
- $S \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

Les problèmes

$$\min_{x \in S} \|g(x)_+\|_1 + \|h(x)_+\|_1 \quad (3.33)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x \in S} & e^T y + e^T z \\ sc & y \geq g(x) \\ & y \geq 0 \\ & z \geq h(x) \\ & z \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

ont les mêmes ensembles de solutions.

**preuve 9**

L'équivalence suit par :

Pour le problème de minimisation (3.34), l'optimum  $y$ ,  $z$  et  $x$  doivent être reliés par l'égalité suivante  $y = g(x)_+$  et  $z = h(x)_+$ .

□

En utilisant ce lemme, nous pouvons établir une formulation équivalente de la programmation linéaire (3.1), à savoir :

**proposition 3.4.1**

Pour tout  $\delta_1 > 0$  et  $\delta_2 > 0$ , le problème de minimisation de l'erreur

$$\min_{\omega, \gamma} \delta_1 \|(-A\omega + e\gamma + e)_+\|_1 + \delta_2 \|(B\omega - e\gamma + e)_+\|_1 \quad (3.35)$$

est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \gamma, y, z} & \delta_1 e^T y + \delta_2 e^T z \\ \text{sc} & A\omega - e\gamma + y \geq 0 \\ & -B\omega + e\gamma + z \geq e \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

**preuve 10**

Par le lemme précédent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \gamma, y, z} & \delta_1 e^T y + \delta_2 e^T z \\ \text{sc} & z \geq B\omega - e\gamma + e \\ & y \geq -A\omega + e\gamma + e \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array} \right.$$

est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\omega, \gamma, y, z} & \delta_1 e^T y + \delta_2 e^T z \\ \text{sc} & A\omega - e\gamma + y \geq e \\ & -B\omega + e\gamma + z \geq e \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array} \right.$$



est équivalent à :

$$\min_{\omega, \gamma} \delta_1 \|(-A\omega + e\gamma + e)_+\|_1 + \delta_2 \|(B\omega - e\gamma + e)_+\|_1$$

□

Le programme linéaire (3.36) proposé par Smith [5] avec des poids égaux :

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{m+k}$$

ne possède pas toutes les propriétés trouvées dans notre programme linéaire avec  $\delta_1 = \frac{1}{m}$  et  $\delta_2 = \frac{1}{k}$  :

$$\min_{\omega, \gamma, y, z} \left\{ \frac{e^T y}{m} + \frac{e^T z}{k} \mid A\omega - e\gamma + y \geq e; -B\omega + e\gamma + z \geq e; y \geq 0; z \geq 0 \right\} \quad (3.37)$$

La principale propriété du programme (3.37) est que pour le cas inséparable linéaire, cela générera toujours un  $\omega$  non trivial sans contrainte supplémentaire. Nous établirons cette propriété en considérant premièrement le programme linéaire (3.35) pour des poids  $\delta_1$  et  $\delta_2 > 0$  et tel que  $\omega = 0$  constitue une solution du problème.

**Théoreme 3.4.2 (Occurrence de la solution  $\omega = 0$ .)**

Soit  $\delta_2 k \geq \delta_1 m$ .

Le programme linéaire (3.36) a une solution ( $\omega = 0, \gamma, y, z$ ) si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{e^T A}{m} = v^T B \\ v \geq 0 \\ e^T v = 1 \\ v \leq \frac{\delta_2 e}{\delta_1 m} \end{cases} \quad (3.38)$$

C'est-à-dire que la moyenne arithmétique des points de l'ensemble  $A$  est égale à une combinaison convexe de plusieurs points de  $B$ .

Quand  $\delta_2 k = \delta_1 m$ , le programme (3.38) dégénère en :

$$\frac{e^T A}{m} = \frac{e^T B}{k} \quad (3.39)$$

C'est-à-dire que la moyenne arithmétique des points de l'ensemble  $A$  est égale à la moyenne arithmétique des points de l'ensemble  $B$ .



**preuve 11**

- Remarquons tout d'abord que  $\delta_2 k \geq \delta_1 m$  ne résulte pas d'une perte de généralité car les rôles de  $A$  et  $B$  peuvent être inversés pour obtenir cette inégalité.
- Considérons maintenant le dual du problème (3.36) qui est :

$$\begin{cases} \max_{u,v} & e^T u + e^T v \\ \text{sc} & A^T u - B^T v = 0 \\ & -e^T u + e^T v = 0 \\ & 0 \leq u \leq \delta_1 e \\ & 0 \leq v \leq \delta_2 e \end{cases} \quad (3.40)$$

Le point  $(\omega = 0, \delta, y, z)$  est optimal pour le problème primal (3.36) si et seulement si :

$$2\delta_1 m = \min_{\gamma} \delta_1 m(1 + \gamma)_+ + \delta_2 k(1 - \gamma)_+$$

Ce qui équivaut à dire :

$$2\delta_1 m = \begin{cases} \min_{\gamma, y, z} & \delta_1 e^T y + \delta_2 e^T z \\ \text{sc} & -e\gamma + y \geq e \\ & e\gamma + z \geq e \\ & (y, z) \geq 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Par le problème (3.40), nous obtenons l'égalité suivante :

$$2\delta_1 m = \begin{cases} \max_{u,v} & e^T u + e^T v \\ \text{sc} & A^T u - B^T v = 0 \\ & -e^T u + e^T v = 0 \\ & (y, z) \geq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Puisque  $e^T u = e^T v$  et  $e^T u + e^T v = 2\delta_1 m$ , nous avons que  $e^T u = e^T v = \delta_1 m$ . Puisque  $0 \leq u \leq \delta_1 e$ , cela entraîne que :

si  $u < \delta_1 e$

alors  $e^T u < \delta_1 m$  (absurde car  $e^T u = \delta_1 m$ ).

D'où  $u = \delta_1 e$ .

En normalisant  $u$  et  $v$  en divisant par  $\delta_1 m$ , on obtient (3.38). Quand  $\delta_2 k = \delta_1 m$ , par (3.38), on a que :

$$0 \leq v \leq \frac{\delta_2 e}{\delta_1 m}$$

ou encore :

$$0 \leq v \leq \frac{e}{k}$$

Puisque  $e^T v = 1$ ,  $v = \frac{e}{k}$ . D'où, on a bien (3.39).

□

Ce théorème donne une explication théorique d'expérience de calcul observé, nommé programme linéaire de Smith (3.36) avec  $\delta_1 = \delta_2$ , finissant parfois avec l'inutilité d'avoir  $\omega = 0$  pour des problèmes linéairement inséparables dans les réels. La raison est la rareté de (3.39) pour des problèmes réels en opposition avec la fréquence de (3.38).

Nous allons montrer que notre solution  $\omega = 0$  constitue une solution au programme linéaire (3.36), excepté pour notre choix proposé de  $\delta_1 = \frac{1}{m}$  et  $\delta_2 = \frac{1}{k}$  tel que  $\omega = 0$  peut être unique et rien ne peut y changer. (voir exemple). Cependant, pour notre programme linéaire (3.37), chaque fois que  $\omega = 0$  apparaît dans le cas rare de (3.39), il existe toujours une solution optimale  $\omega \neq 0$ .

### **Théoreme 3.4.3**

*La solution  $(\omega = 0, \gamma, y, z)$  de (3.37) n'est pas unique.*

#### **preuve 12**

Remarquer que pour la première égalité de (3.41) avec  $\delta_1 m = \delta_2 k = 1$ , lorsque  $(\bar{\omega} = 0, \gamma, y, z)$  est solution de (3.37), alors  $\bar{\gamma}$  peut être n'importe quel point situé dans  $[-1, 1]$ .

En effet :

Les contraintes de (3.37) car  $\bar{\omega} = 0$  :

$$-e\gamma + y \geq e$$

$$e\gamma + z \geq e$$

entraînent :

$$y \geq e + e\gamma \quad \text{et} \quad z \geq e - e\gamma$$

Ce qui est équivalent à :

$$e(1 + \gamma) \geq 0 \quad \text{et} \quad e(1 - \gamma) \geq 0 \quad \text{car} \quad y \geq 0 \quad \text{et} \quad z \geq 0$$

D'où :

$$1 + \gamma \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 - \gamma \geq 0$$

Les racines de ces inéquations sont respectivement  $-1$  et  $+1$ , ce qui entraîne  $\gamma \in [-1, +1]$ .

Considérons en particulier  $\bar{\gamma} = 0$ . Dans ce cas ( $\bar{\omega} = 0, \bar{\gamma} = 0$ ), l'optimum correspondant  $y, z$  pour (3.37) est  $\bar{y} = e, \bar{z} = e$  et les contraintes actives sont les deux premières contraintes de (3.37).

En effet, on a les contraintes suivantes :

$$A\bar{\omega} - e\bar{\gamma} + y \geq e \quad y \geq 0$$

$$-B\bar{\omega} + e\bar{\gamma} + z \geq e \quad z \geq 0$$

avec  $\bar{\omega} = 0$  et  $\bar{\gamma} = 0$ , on a  $y \geq 0$  et  $z \geq 0$  à l'optimum

i-e en minimisant  $\frac{e^T y}{m} + \frac{e^T z}{k}$ , on obtient :

$\bar{y} = e$  et  $\bar{z} = e$ , ce qui entraîne que  $\bar{y}$  et  $\bar{z} \geq 0$

D'où la solution est unique pour  $\bar{\omega}$  si et seulement si le système linéaire suivant n'a pas de solution  $(\omega, \gamma, y, z)$  (contradiction de minimum) :

$$\begin{array}{rcl} \frac{e^T}{m} y + \frac{e^T}{k} z \leq & \frac{e^T}{m} \bar{y} + \frac{e^T}{k} \bar{z} & \\ A\omega - e\gamma + y \geq & A\bar{\omega} - e\bar{\gamma} + \bar{y} = e & \\ -B\omega + e\gamma + z \geq & -B\bar{\omega} + e\bar{\gamma} + \bar{z} = e & \\ \omega \neq & \bar{\omega} & \end{array} \quad (3.43)$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{array}{rcl} \forall h \in \mathbb{R}^n & & \\ -\frac{e^T}{m} (y - \bar{y}) - \frac{e^T}{k} (z - \bar{z}) \geq & 0 & \\ A(\omega - \bar{\omega}) - e(\gamma - \bar{\gamma}) + (y - \bar{y}) \geq & 0 & \\ -B(\omega - \bar{\omega}) + e(\gamma - \bar{\gamma}) + (z - \bar{z}) \geq & 0 & \\ -h(\omega - \bar{\omega}) > & 0 & \end{array} \quad (3.44)$$

Par le théorème de Motzkin (voir annexe), (3.44) n'a pas de solution pour

un  $h$  donné dans  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si le système :

$$\begin{aligned} A^T u - B^T v &= h \\ -e^T u + e^T v &= 0 \\ -\frac{1}{m} e\tau + u &= 0 \\ -\frac{1}{k} e\tau + v &= 0 \\ \tau, u, v &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

a une solution  $(\tau, u, v)$  pour ce  $h$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Evidemment ce n'est pas possible de choisir un tel  $h$  dans  $\mathbb{R}^n$ , d'où il existe  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$h \neq \frac{A^T e\tau}{m} - \frac{B^T e\tau}{k} \tau \geq 0$$

(3.45) donne :

$$u = \frac{1}{m} e\tau \quad v = \frac{1}{k} e\tau \quad A^T u - B^T v = h$$

Ce qui donne :  $A^T \frac{1}{m} e\tau - B^T \frac{1}{k} e\tau = 0$ .

D'où (3.44) a une solution pour cet  $h \in \mathbb{R}^n$ .

D'où (3.43) a une solution et  $\bar{\omega} = 0$  n'est pas unique.

□

Nous allons appliquer ce théorème à un exemple pour lequel la condition (3.39) est satisfaite, d'où  $(\bar{\omega} = 0, \bar{\gamma}, \bar{y}, \bar{z})$  est solution de (3.37) ne sera pas unique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{e^T A}{2} = \frac{e^T B}{2} = ?}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{eA}{2} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{eB}{2} \\ \text{D'où } \frac{e^T A}{2} &= \frac{e^T B}{2}.\end{aligned}$$

$$(3.37) = \min_{\omega, \gamma, y, z} \left\{ \frac{e^T y}{2} + \frac{e^T z}{2} \mid A\omega - e\gamma + y \geq e; -B\omega + e\gamma + z \geq e; y \geq 0; z \geq 0 \right\}$$

$$\underline{A\omega - e\gamma + y \geq e} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 + \omega_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

de la deuxième ligne, on obtient :  $\omega_1 + \omega_2 - \gamma + y_2 \geq 1$

i-e  $\gamma \leq y_2 + \omega_1 + \omega_2 - 1$

en mettant cela dans la première :  $\gamma \leq y_1 - 1$

en mettant les deux ensembles, on obtient :  $y_1 \leq y_2 + \gamma_1 + \gamma_2$ .

$$\underline{-B\omega + e\gamma + z \geq e} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &\geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

de la première inégalité, on obtient :  $\gamma \geq 1 - z_1 + \omega_1$

de la deuxième inégalité, on obtient :  $\gamma \geq 1 - z_2 + \omega_2$

en regroupant (1) et (2), on obtient :  $1 - z_1 + \omega_1 \leq \gamma \leq y_1 - 1$

(3.37) entraîne :

$$- y \geq e - A\omega + e\gamma$$

$$- z \geq e + B\omega - e\gamma$$

Cela peut encore être réécrit sous la forme suivante :

$$\min_{\omega, \gamma} \frac{ey}{2} + \frac{ez}{2} = \min_{\omega, \gamma} \frac{1}{2} (ey + ez)$$

ou encore :

$$\min_{\omega, \gamma} \frac{1}{2} (e(e - A\omega + e\gamma) + e(e + B\omega - e\gamma))$$

ou encore :

$$\min_{\omega, \gamma} \frac{1}{2} \left( e \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma \right) + e \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Ce qui peut encore se réécrire après développement sous la forme suivante :

$$\min_{\omega, \gamma} \frac{1}{2} ((1 + \gamma)_+ + (1 - \omega_1 - \omega_2 + \gamma)_+ + (1 + \omega_1 - \gamma)_+ + (1 + \omega_2 - \gamma)_+)$$

Le minimum est atteint et vaut 2.

Or si nous regardons :

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{\gamma} = 1$$

Nous trouvons aussi la valeur optimale égale à 2. Ce qui illustre bien le théorème.



## Chapitre 4

### Conclusions.

Que ce soit sous la forme standard ou sous la forme matricielle avec  $A(m, n)$  et  $B(k, n)$  représentant respectivement les deux ensembles de données à séparer, le cas où les ensembles  $A$  et  $B$  sont linéairement séparables est toujours plus facile à traiter. Dans ce cas, un hyperplan de séparation optimal pouvait être obtenu en maximisant la marge entre les points les plus proches dans les enveloppes convexes. Une autre façon de faire était de travailler avec la dualité à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Beaucoup d'algorithmes sont mis à notre disposition dans la littérature pour résoudre ce problème de séparation.

Dans un deuxième temps, nous avons considéré le cas où les ensembles  $A$  et  $B$  étaient linéairement inséparables. Ce cas pouvait être ramené au cas linéairement séparable en utilisant les enveloppes convexes réduites  $A$  et  $B$  car les enveloppes convexes de ces deux ensembles s'intersectaient. Ceci nous permettait de réduire l'influence de tout point isolé. Dans ce cas, l'hyperplan de séparation optimal était obtenu en maximisant la marge et en minimisant l'erreur.

En ce qui concerne le cas non linéaire, l'hyperplan de séparation optimal était obtenu en transformant l'espace des entrées à deux dimensions dans un espace de dimension plus grande et en utilisant les noyaux. Un des cas les plus connus dans la littérature, le XOR, nous a servi d'illustration.

Pour des cas bien particuliers, la fonction  $\epsilon$ -insensible nous a été utile pour traiter tout ce qui concernait la régression afin d'obtenir un  $\epsilon$ -tube qui séparait les deux ensembles.

## Annexes.

Afin de démontrer certains résultats, nous avons dû utiliser certains résultats connus dans la littérature. Les voici ici :  
 Pour ce qui concerne le théorème de l'alternative de Motzkin, nous avons besoin d'un corollaire et d'un théorème préliminaires.

### **corollaire 4.0.1**

Soient  $A(p^1 \times n), B(p^2 \times n), C(p^3 \times n), D(p^4 \times n)$  des matrices avec  $A, B$  ou  $C$  "non vides".

Alors les systèmes :

$$\begin{cases} Ax \geq 0 \\ Bx \geq 0 \\ Cx \geq 0 \\ Dx \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0; y_4 \geq 0 \end{cases}$$

possèdent les solutions :

$$x \in \mathbb{R}^n, y_1 \in \mathbb{R}^{p^1}, y_2 \in \mathbb{R}^{p^2}, y_3 \in \mathbb{R}^{p^3}, y_4 \in \mathbb{R}^{p^4} \text{ tq } \begin{array}{ll} Ax + y_1 & > 0 \\ Bx + y_2 & > 0 \\ Cx + y_3 & > 0 \end{array}$$

**preuve 13**

Ce théorème provient du théorème d'existence de Tucker, à savoir :  
 $\forall$  matrice  $A(p \times n)$ , les systèmes :

$$\begin{array}{l} I \quad Ax \geq 0 \\ \text{et} \\ II \quad \begin{cases} A^T y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

possèdent les solutions  $x$  et  $y$  tq  $Ax + y > 0$

Par le lemme de Tucker, à savoir :

$\forall$  matrice  $A(p \times n)$ , les systèmes :

$$\begin{array}{l} I \quad Ax \geq 0 \\ \text{et} \\ II \quad \begin{cases} A^T y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{possèdent les solutions } x \text{ et } y \text{ tq } A_1 x + y_1 > 0$$

Dans le lemme de Tucker  $A_1$  joue un rôle particulier : en renumérotant les colonnes c'est-à-dire en changeant l'ordre des colonnes de  $A$ , toute colonne  $A_i$  peut jouer le même rôle.

D'où par le lemme :

$$\exists x^i \in \mathbb{R}^n, y^i \quad i = 1 \dots p \text{ tq}$$

$$\begin{cases} Ax^i \geq 0 \\ A^T y^i = 0, y^i \geq 0 \\ A_i x^i + y_i^i > 0 \end{cases} \quad i = 1 \dots p$$

Définissons

$$x = \left( \sum_{i=1}^p x^i \right)$$

et

$$y = \left( \sum_{i=1}^p y^i \right)$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} Ax &= Ax^i \geq 0 \\ A^T y &= \sum_{i=1}^p A^T y^i = 0 \\ y &= \sum_{i=1}^p y^i \geq 0 \end{cases} \quad i = 1 \dots p$$

$$A_i x + y_i = \underbrace{A_i x^i + y_i^i}_{>0} + \sum_{k=1; k \neq i}^p \underbrace{(A_i x^k + y_i^k)}_{\geq 0} > 0 \iff Ax + y > 0$$

□

**Théoreme 4.0.4 (Théorème de l'alternative de Motzkin)**

Soient  $A, C$  et  $D$  matrices avec  $A$  "non vide"

Alors

$$\begin{array}{ll} \text{soit} & I \quad Ax \geq 0; Cx \geq 0; Dx = 0 \\ & \text{a une solution } x \\ \text{ou} & II \quad \begin{cases} A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0 \\ y_1 \geq 0; y_3 \geq 0 \geq 0 \end{cases} \\ & \text{a une solution } y_1, y_3, y_4 \end{array}$$

mais jamais les deux.

**preuve 14**

a)

$$(I \implies \neg II)$$

Si on a  $I$  et  $II$  ( par l'absurde)

alors nous obtenons la relation suivante :

$$\underbrace{x A^T y_1}_{>0} + \underbrace{x C^T y_3}_{\geq 0} + \underbrace{x^T y_4}_{=0} > 0$$

Ce qui contredit  $II$ . D'où ce que nous avons supposé est correct.

b)

$$(\neg I \implies II)$$

$$\begin{aligned}
\neg I &\Rightarrow \begin{cases} Ax \geq 0 \\ Cx \geq 0 \\ Dx = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} Ax \geq 0, Cx \geq 0, Dx = 0 \\ A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0 \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow y_1 \geq 0 \\
&\Rightarrow II
\end{aligned}$$

□

**Théoreme 4.0.5 (Théorème de Gordan.)**

∀ matrice  $A$ ,

$$\begin{aligned}
&\text{soit } I \quad Ax > 0 \\
&\quad \quad \quad a \text{ une solution } x \\
&\text{ou } II \quad \begin{cases} A^T y = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\
&\quad \quad \quad a \text{ une solution } y
\end{aligned}$$

mais jamais les deux.

**preuve 15**

La preuve suit directement du théorème de Motzkin en supprimant les matrices  $C$  et  $D$ .

□

**Théoreme 4.0.6 (Théorème de Gale pour  $\leq$ .)**

Pour une matrice  $A(p \times n)$  et un vecteur donné  $c \in \mathbb{R}^p$ , soit

le système  $Ax \leq c$  a une solution  $x \in \mathbb{R}^n$

ou

le système  $A^T y = 0, cy = -1, y \geq 0$  a une solution  $y \in \mathbb{R}^p$

mais jamais les deux.

# Table des figures

2.1	Interprétation géométrique de l'hyperplan de séparation. . . .	10
2.2	Deux plans de séparation possibles linéaires. . . . .	11
2.3	Des points 0 mal classés. . . . .	12
2.4	Meilleur plan bissectant les points les plus proches dans les enveloppes convexes. . . . .	13
2.5	Interprétation géométrique de la marge. . . . .	13
2.6	Interprétation géométrique de la marge maximale. . . . .	14
2.7	Meilleur plan maximisant la marge. . . . .	15
2.8	Interprétation géométrique des vecteurs de support. . . . .	16
2.9	Comment représenter un hyperplan de séparation et sa marge? . . . .	17
2.10	Plusieurs plans de marge fine possibles. . . . .	19
2.11	Plan de marge large possible. . . . .	20
2.12	Pour le cas inséparable, les enveloppes convexes s'intersectent. . . .	20
2.13	Meilleur plan de séparation des enveloppes convexes réduites. . . .	21
2.14	Plan sélectionné pour maximiser la marge et minimiser l'erreur. . . .	22
2.15	Interprétation géométrique des $\epsilon_i$ . . . . .	24
2.16	Exemple demandant une séparation quadratique. . . . .	26
2.17	Pour essayer de séparer les points, on les envoie dans un espace euclidien de dimension plus importante. . . . .	27
2.18	Représentation géométrique de l'exemple. . . . .	27
2.19	Exemple avec un noyau polynomial de degré 2. . . . .	31
2.20	Le problème du XOR. . . . .	36
2.21	La surface de décision. . . . .	37
2.22	(a) $\epsilon_0$ -tube "dur" primal;(b) dual strictement séparable $\epsilon >$ $\epsilon_0$ , (c) dual séparable $\epsilon = \epsilon_0$ , (d) dual inséparable $\epsilon < \epsilon_0$ . . . . .	43
2.23	Une fonction perte $\epsilon$ -insensible par morceau. . . . .	43
2.24	Dessin d'un $\epsilon$ -tube. Les points en dehors sont considérés comme des erreurs. . . . .	44
2.25	Solution d'un $\bar{\epsilon}$ -tube trouvé par C-SVR peut avoir $\bar{\epsilon} < \epsilon$ . Les $\square$ sont les données originelles, les $\circ$ sont dans $D^+$ et les $\nabla$ dans $D^-$ . Les vecteurs de support sont 0. . . . .	48



2.26	ê-tube trouvé par RC-SVR; à gauche dans l'espace dual-à droite dans l'espace primal. . . . .	53
3.1	Lequel de ces 2 hyperplans est le meilleur? . . . . .	59
3.2	Les deux points de fermeture des enveloppes convexes déterminent l'hyperplan de séparation. . . . .	61
3.3	Le problème dual maximise la distance entre les deux plans d'appui parallèles. . . . .	67
3.4	Pour des ensembles linéairement séparables, les enveloppes convexes s'intersectent. . . . .	74
3.5	Enveloppes convexes et enveloppes convexes réduites pour $K=2$ . . . . .	74
3.6	Résultats obtenus par les méthodes MSM, RLP, RLP-P et GOP. . . . .	84
3.7	Un hyperplan de séparation optimal pour les ensembles linéairement séparables $A(o)$ et $B(+)$ . . . . .	85

# Bibliographie

- [1] J. Bi and K. P. Bennett, Duality, Geometry, and Support Vector Regression, June 2001, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2002.
- [2] K. P. Bennett and E. Bredensteiner, Geometry in Learning, *Geometry at Work*, C. Gorini editors, Mathematical Association of America, Washington D.C, 2000, pp. 132-145.
- [3] K. P. Bennett and E. Bredensteiner, Duality and Geometry in SVM Classifiers, *Proceedings of Seventeenth International Conference on Machine Learning*, Pat Langley Editor, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2000, pp. 57-64.
- [4] K. P. Bennett and C. Campbell, Support Vector Machines : Hype or Hallelujah ?, *SIGKDD Explorations*, 2, 2, 2000, pp. 1-13.
- [5] K. P. Bennett and O. L. Mangasarian, Robust Linear Programming Discrimination of Two Linearly Inseparable Sets, *Optimization Methods and Software*, 1, 1992, pp. 23-34.
- [6] K. Chen, Support Vector Machine (I), Lecture Notes on "Nature Inspired Learning", MSc in Natural Computation, Department of Computer Science, University of Birmingham, UK, [http ://www.cs.bham.ac.uk/~kxc/NIL/nil.html](http://www.cs.bham.ac.uk/~kxc/NIL/nil.html)>[http ://www.cs.bham.ac.uk/~kxc/NIL/nil.html](http://www.cs.bham.ac.uk/~kxc/NIL/nil.html)>[http ://www.cs.bham.ac.uk/~kxc/NIL/nil.html](http://www.cs.bham.ac.uk/~kxc/NIL/nil.html)>html
- [7] R. Collobert, Support Vector Machines : Théorie et Applications, Université de Rennes, Laboratoire " Modélisations Aléatoires et Applications", Rapport DEA, 2000.
- [8] T. Joachims, A Tutorial on Support Vector Machines, NIPS'00 Kernel Workshop.
- [9] O. L. Mangasarian, *Multisurface Method of Pattern Separation*, IEEE Transactions on Information Theory, IT-14, 801-807, 1968.
- [10] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, PhD, 1994.

- [11] B. Schölkopf, *Support Vector Learning*, Berlin, 1997.
- [12] V. H. Nguyen, Lectures on Support Vector Machines and Optimization, Summer School on Optimization Methods in Technology and Management, Da Nang, VN, Août 2000.